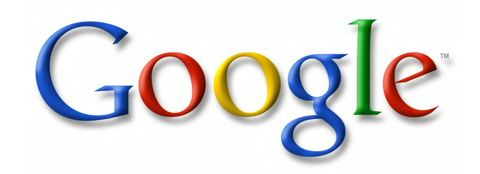
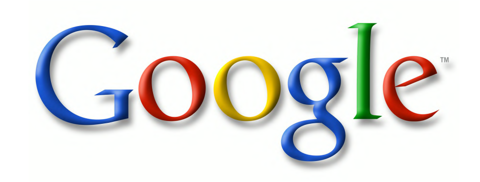
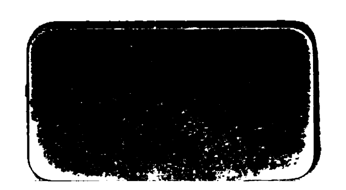








NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1879.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

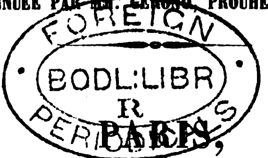
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU LYCÉE FONTANES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DIX-HUITIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,

ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1879.

NOUVELLES ANNALES

MATHÉMATIQUES.

SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

PAR M. LAGUERRE.

1. La règle des signes de Descartes consiste dans les deux propositions suivantes :

I. $F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

II. *Si le nombre des racines positives est inférieur au nombre des variations du polynôme, la différence est un nombre pair.*

2. Pour établir la première proposition, je démontrerai que, si elle est vraie quand le polynôme qui forme le premier membre de l'équation présente $(m - 1)$ variations, elle est également vraie quand ce polynôme présente m variations. La proposition sera, par suite, établie dans toute sa généralité, puisqu'elle a lieu évidemment dans le cas où tous les termes du polynôme sont de même signe.

Soit donc $F(x) = Ax^p + \ldots + Mx^r + Nx^s + \ldots + R$ un polynôme présentant m variations. L'équation

$$(1) \qquad F(x)x^{-\alpha} = 0,$$

où α désigne un nombre arbitraire, a les mêmes racines positives que l'équation

$$(2) \qquad F(x) = 0.$$

La fonction qui constitue le premier membre de cette équation demeure d'ailleurs finie et continue quand x croît indéfiniment à partir d'un nombre positif ε aussi petit que l'on veut. On peut donc appliquer à cette équation le théorème de Rolle entre les limites o et $+\infty$, et l'on voit que le nombre des racines positives de l'équation (2) est au plus supérieur d'une unité au nombre des racines positives de l'équation $x^{-(\alpha+1)}[xF'(x) - \alpha F(x)]$, ou encore de l'équation

$$(3) \qquad xF'(x) - \alpha F(x) = 0.$$

Les coefficients de cette équation sont respectivement

$$A(p-\alpha), \ \ldots, \ M(r-\alpha), \ N(s-\alpha), \ \ldots, \ -R\alpha.$$

Le polynôme $F(x)$ présentant m variations, supposons que M et N soient de signes contraires et choisissons le nombre arbitraire α de telle sorte qu'il se trouve compris entre les nombres entiers r et s (*); on voit que, dans la suite précédente, les coefficients numériques des quantités A, ..., M sont tous positifs, et ceux des quantités N, ..., R tous négatifs.

Le premier membre de l'équation (3) présente donc autant de variations que la suite

$$A, \ \ldots, \ M, -N, \ \ldots, \ -R,$$

c'est-à-dire $(m-1)$ variations; par suite, cette équation a au plus $(m-1)$ racines positives, et l'équation (2) a au

(*) On pourrait prendre plus simplement α égal à r ou à s; mais, dans quelques applications des considérations précédentes, il est utile de pouvoir, entre certaines limites, disposer de la valeur de α.

plus m racines positives. La proposition I est donc complétement établie.

Pour démontrer la proposition II, il suffit, comme on sait, de remarquer que le nombre des racines positives de l'équation (2) et le nombre des variations du polynôme $F(x)$ sont toujours de même parité.

3. La démonstration précédente ne suppose pas essentiellement que, dans l'équation (2), $F(x)$ soit un polynôme entier.

En particulicr, rien dans l adémonstration ne suppose les exposants $p, \ldots, r, s, \ldots$ entiers; ainsi, l'équation

$$x^3 - x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,$$

présentant trois variations, a au plus trois racines réelles.

Supposons, par exemple, que $F(x)$ soit une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, convergente pour toutes les valeurs positives de x plus petites qu'un nombre donné a, et cessant d'être convergente pour $x = a$. Supposons, en outre, que le nombre des variations de la série $F(x)$ soit fini; on établira, comme ci-dessus, que *le nombre des valeurs de x pour lesquelles la série* $F(x)$ *est convergente et a pour valeur zéro est au plus égal au nombre des variations de la série* $F(x)$.

De plus, *si le nombre des valeurs de x qui jouissent de cette propriété est inférieur au nombre des variations de la série, la différence est un nombre pair.*

En effet, le nombre des variations des termes de la série étant fini, $F(x)$ est égal à un polynôme $\Phi(x)$ suivi d'un nombre indéfini de termes ayant tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$. Pour $x = 0$, la série a le signe du premier terme de $\Phi(x)$. Quand x tend vers la valeur a, $\Phi(x)$ tend vers une valeur finie; les termes

complémentaires, qui sont en nombre infini, ont tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$, et leur valeur absolue va en croissant indéfiniment, puisque la série $F(x)$ est divergente pour $x=a$. Donc, quand x s'approche indéfiniment de a, la série $\Phi(x)$ croît indéfiniment en valeur absolue en gardant le signe du dernier terme de $\Phi(x)$; d'où résulte immédiatement la proposition énoncée.

4. Pour appliquer cette proposition à la recherche du nombre des racines positives de l'équation

$$f(x)=0, \tag{4}$$

où $f(x)$ désigne un polynôme entier, je choisirai un polynôme $\varphi(x)$, assujetti à la seule condition que le développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ suivant les puissances croissantes de x ne renferme qu'un nombre limité de variations.

Cela posé, A désignant le plus petit des modules des racines de l'équation $\varphi(x)=0$, ce développement est convergent pour toutes les valeurs positives de x plus petites que A et est divergent pour $x=A$; il s'annule d'ailleurs pour toutes les racines positives de l'équation (4) qui sont inférieures à A.

On peut donc énoncer cette proposition :

Le polynôme $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition ci-dessus énoncée, le nombre des racines positives de l'équation $f(x)=0$, dont la valeur est inférieure à A *est au plus égal au nombre des variations du développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ suivant les puissances croissantes de x, et, s'il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.*

5. En considérant seulement les cas les plus simples, soit d'abord $\varphi(x)=p-x$, p désignant un nombre quelconque positif.

Soit n le degré de $f(x)$; en désignant par P un polynôme du degré $(n-1)$, on a identiquement

$$\frac{f(x)}{p-x} = P + \frac{f(p)}{p-x} = P + f(p)\left(\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} + \frac{x^2}{p^3} + \cdots\right).$$

On voit que tous les termes de ce développement ont, à partir du coefficient de x^n, le même signe. D'ailleurs, ce développement est convergent pour toutes les valeurs positives de x inférieures à p; donc le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, dont la valeur est inférieure à p, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes du développement de $\frac{f(p)}{p-x}$ dont le degré ne dépasse pas n.

Comme il s'agit seulement d'obtenir les signes des termes de ce développement, et que p est positif, on peut remplacer l'expression $\frac{f(x)}{p-x}$ par $\frac{f(px)}{p(1-x)}$, ou encore par la suivante:

$$\frac{f(px)}{1-x} = f(px)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots);$$

d'où cette proposition:

Étant donnée l'équation

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

le nombre des racines positives de cette équation, dont la valeur est inférieure au nombre positif p, est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$\begin{array}{r}
A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \ldots + A_{n-2} p^2 + A_{n-1} p + A_n, \\
A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \ldots + A_{n-2} p^2 + A_{n-1} p + A_n, \\
A_2 p^{n-2} + \ldots + A_{n-2} p^2 + A_{n-1} p + A_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{n-2} p^2 + A_{n-1} p + A_n, \\
A_{n-1} p + A_n, \\
A_n;
\end{array}$$

et, s'il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.

6. En désignant toujours par p un nombre quelconque positif, faisons en second lieu

$$\varphi(x) = (p - x)^2.$$

On a identiquement, P étant un polynôme entier du degré $(n - 2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(p-x)^2} &= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{(p-x)^2} - \frac{f'(p)}{p-x} \\
&= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{p^2}\left[1 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^3}\left[2 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x + \ldots \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+1}}\left[n - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x^{n-1} \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+2}}\left[n + 1 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x^{n} \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+3}}\left[n + 2 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] x^{n+1} + \ldots.
\end{aligned}$$

Le nombre des variations du second membre se compose d'abord des variations du polynôme entier Q, formé des termes du développement de $\frac{f(x)}{(p-x)^2}$ dont l'exposant est inférieur à n, et ensuite des variations des termes de la suite

$$n - p\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad n + 1 - p\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad n + 2 - p\frac{f'(p)}{f(p)}, \ldots.$$

Comme ces termes vont toujours en croissant, la suite ne peut présenter qu'une variation, et elle la présentera effectivement si le nombre $n - p\frac{f'(p)}{f(p)}$ est négatif.

Au lieu du développement de $\frac{f(x)}{(p-x)^2}$, on peut évidemment considérer le suivant :

$$\frac{f(px)}{(1-x)^2} = f(px)(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)$$

et énoncer cette proposition :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n,$$

si λ *désigne le nombre des racines de l'équation*

$$f(x) = 0$$

positives et inférieures au nombre positif p, *et* μ *le nombre des variations des termes de la suite*

$$\begin{array}{r} A_1p^{n-1} + 2A_2p^{n-2} + \ldots + (n-2)A_{n-2}p^2 + (n-1)A_{n-1}p + nA_n, \\ A_2p^{n-2} + \ldots + (n-3)A_{n-2}p^2 + (n-2)A_{n-1}p + (n-1)A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{n-2}p^2 + 2A_{n-1}p + 3A_n, \\ A_{n-1}p + 2A_n, \\ A_n, \end{array}$$

le nombre λ *est au plus égal au nombre* $(\mu + 1)$, *et leur différence est un nombre impair si la quantité* $n - p\frac{f'(p)}{f(p)}$ *est positive ou nulle; la différence est zéro ou un nombre pair si cette quantité est négative.*

7. Soient p et q deux nombres positifs quelconques assujettis à la seule condition que q soit plus grand que p; faisons $\varphi(x) = (p-x)(q-x)$. Le développement en série de $\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)}$ est convergent pour toutes les

valeurs positives de x inférieures à p, et l'on a identiquement, P désignant un polynôme entier du degré $(n-2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)} &= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{q-p}\,\frac{1}{p-x} - \frac{f(q)}{q-p}\,\frac{1}{q-x} \\
&= \mathrm{P} + \frac{1}{q-p}\left\{\frac{f(p)}{q}\left[\frac{q}{p}-\frac{f(q)}{f(p)}\right]\right. \\
&\qquad + \frac{f(p)}{q^2}\left[\frac{q^2}{p^2}-\frac{f(q)}{f(p)}\right]x + \ldots \\
&\qquad + \frac{f(p)}{q^n}\left[\frac{q^n}{p^n}-\frac{f(q)}{f(p)}\right]x^{n-1} \\
&\qquad + \frac{f(p)}{q^{n+1}}\left[\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{f(q)}{f(p)}\right]x^{n} \\
&\qquad \left. + \frac{f(p)}{q^{n+2}}\left[\frac{q^{n+2}}{p^{n+2}}-\frac{f(q)}{f(p)}\right]x^{n+1} + \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Le nombre des variations du second membre se compose d'abord des variations du polynôme entier Q, formé des termes du développement de $\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)}$ dont l'exposant est inférieur à n, et ensuite des variations des termes de la suite

$$\frac{q^n}{p^n}-\frac{f(q)}{f(p)},\quad \frac{q^{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{f(q)}{f(p)},\quad \frac{q^{n+2}}{p^{n+2}}-\frac{f(q)}{f(p)},\quad \ldots.$$

Or, $\frac{q}{p}$ étant plus grand que 1, les termes de cette suite vont toujours en croissant et ne peuvent présenter qu'une variation; elle se présentera si $\frac{q^n}{p^n}-\frac{f(q)}{f(p)}$ est négatif.

En se reportant à ce que j'ai dit plus haut, on peut donc énoncer la proposition suivante :

En désignant par $f(x)$ un polynôme entier du degré n, et par p et q deux nombres positifs arbitraires, mais dont le second soit supérieur au premier, soient λ le nombre des racines positives de l'équation $f(x)=0$

qui sont inférieures à p, et μ le nombre des variations du polynôme formé des termes du développement de

$$\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)},$$

dont l'exposant est inférieur à n; le nombre μ est au plus égal au nombre $(\lambda+1)$, et leur différence est un nombre impair si la quantité

$$\frac{q^n}{p^n}-\frac{f(q)}{f(p)}$$

est positive ou nulle; elle est zéro ou un nombre pair si cette quantité est négative.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877

POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

SOLUTION DE M. E. BOUGLÉ,

Élève du collége Rollin (*).

Rechercher les surfaces S *du second degré sur lesquelles il existe une droite* D, *telle que l'hyperboloïde de révolution* H, *qui a pour axe une génératrice rectiligne quelconque* G, *de la surface* S, *et du même système que* D, *et qui passe par la droite* D, *coupe orthogonalement la surface* S *en tous les points de cette droite.*

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H *qui se rapportent à une même surface* S *jouissant de la propriété énoncée :*

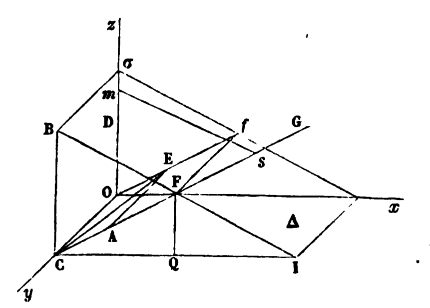
1° *Trouver le lieu des sommets* A *et celui des foyers* F

(*) M. E. Bouglé a obtenu le prix d'honneur.

des hyperboloïdes H′ *conjugués des hyperboloïdes* H;

2° *Par l'un des foyers* F *de l'hyperboloïde* H′, *on mène un plan* P *parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites* G *et* D, *et faisant, avec cette dernière, un angle supplémentaire de celui que fait avec cette même droite l'axe* G *de l'hyperboloïde* H ; *trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan* P *coupe la droite* D *à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface* S *et de l'hyperboloïde* H.

Soit un point m de la droite D ; le plan tangent en ce point aux hyperboloïdes H est perpendiculaire au plan tangent à la surface S, de plus il passe par D ; donc il



est le même pour toutes les surfaces H; la normale à tous les hyperboloïdes est donc aussi la même, mais elle rencontre les axes de tous les hyperboloïdes, c'est-à-dire les génératrices de S; donc elle est située sur S. D'ailleurs, elle est perpendiculaire à D, et, comme elle est la seconde génératrice de S qui passe par le point m, S est un paraboloïde ayant D pour directrice, et un plan perpendiculaire à D pour plan directeur correspondant.

Réciproquement, considérons un tel paraboloïde ; il jouit de la propriété de la surface S. En effet, soit la génératrice mS qui passe par m, le plan tangent à S est

déterminé par la droite D ; la normale à un hyperboloïde H doit être perpendiculaire à D et rencontrer l'axe G : donc ce n'est autre que mS, puisque G et mS sont des génératrices de système différent de S et par suite se rencontrent. Le plan tangent à S passe donc par la normale à H : ces deux plans tangents sont donc perpendiculaires.

Cela posé, le second plan directeur du paraboloïde, étant parallèle à D perpendiculaire à Δ, est aussi perpendiculaire à ce plan. Les deux plans directeurs sont donc perpendiculaires.

Enfin considérons le plan tangent au sommet : il coupe la surface suivant deux droites ; chacune d'elles est perpendiculaire au plan directeur qui ne la contient pas : donc on pourra prendre pour la droite D l'une ou l'autre de ces deux droites. Il n'y a pas sur la surface d'autre droite jouissant de la propriété de D, car il y aurait sur le paraboloïde deux génératrices perpendiculaires à un plan directeur et par suite parallèles.

1° Prenons pour axe des x l'axe du paraboloïde, et pour axes des y et des z les génératrices du sommet.

La droite D sera alors Oz par exemple.

L'équation de S

$$yz = px,$$

et les équations de G

$$y = p\lambda, \quad z = \frac{x}{\lambda}.$$

Cherchons l'équation de la surface engendrée par l'axe des z tournant autour de G, on trouve facilement

$$\text{(H)} \qquad p^2\lambda^2 + (\lambda x + z)^2 = x^2 + (\lambda - p\lambda)^2 + z^2.$$

Remarquons que la perpendiculaire commune à (G) et à (D) est précisément Oy ; par suite, le centre de l'hyperboloïde H est C et le rayon du cercle de gorge OC.

Cherchons les points de rencontre de l'axe avec l'hyperboloïde : on trouve

$$z^2 = -\frac{p^2}{\lambda^2+1};$$

les valeurs de z sont donc imaginaires; mais, si l'on prend les valeurs réelles

$$z^2 = \frac{p^2}{\lambda^2+1},$$

on aura justement les z des sommets réels A de l'hyperboloïde H' conjugué de H.

Si donc on élimine λ entre cette équation et les équations de G, on aura le lieu: ce lieu sera défini par l'intersection du paraboloïde avec une autre surface; pour l'avoir, on tire $\lambda = \frac{x}{z}$ et, en portant dans la dernière équation, il vient

$$z^2 = \frac{p^2 z^2}{x^2+z^2} \quad \text{ou} \quad x^2+z^2=p^2,$$

c'est-à-dire un cylindre de révolution autour de Oy; on pouvait voir autrement ce résultat, en construisant la longueur des axes de la section méridienne de H dans le plan COG; CO est en grandeur et en position l'axe réel de H : l'asymptote s'obtiendra en menant dans le plan COG une droite CE faisant avec G un angle ACE égal à celui de D, et G et EO seront l'axe imaginaire de H et réel de H'; or on a

$$\text{EO} = \text{CO tang ECO},$$

et, en nous reportant aux équations de G,

$$\text{CO} = p\lambda, \quad \text{tang ECO} = \frac{z}{x} = \frac{1}{\lambda};$$

donc

$$\text{EO} = p\lambda\frac{1}{\lambda} = p,$$

c'est-à-dire que la distance du point A à l'axe Oy est constante.

Cherchons les foyers F. On a, par définition,

$$\overline{CF}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{AO}^2$$

ou, en appelant x, y, z les coordonnées de F,

$$x^2 + y^2 = p^2 + p^2\lambda^2;$$

mais des équations de G on tire

$$n = \lambda z:$$

donc

$$z^2(1+\lambda^2) = p^2(1+\lambda^2)$$

ou

$$z^2 = p^2;$$

donc les foyers sont sur les génératrices d'intersection du paraboloïde avec deux plans parallèles au plan directeur et menés à la distance p.

2° Menons par le point F un plan parallèle à la plus courte distance entre Oz et G, c'est-à-dire à Oy. Son équation sera celle de sa trace sur zOx, ou une droite passant par la projection f de F et symétrique de la direction de la projection de G, $x = \lambda z$. Les coordonnées de f sont

$$x = p\lambda, \quad z = p.$$

On a donc, pour équation du plan P,

$$(x - p\lambda) + \lambda(z - p) = 0.$$

Cherchons son intersection avec Oz, on trouve

$$z = 2p,$$

ce qu'on pouvait voir directement ; en effet, coupons la figure par un plan mené par G perpendiculairement à Oy : il coupe P suivant la droite BFI symétrique de CF

par rapport à FQ ; donc

$$QI = CQ \quad \text{et} \quad BC = 2FQ = 2p;$$

donc $O\sigma = 2p$.

Le point σ est donc fixe sur Oz; par suite, la droite qui passe par le point de rencontre de P avec D engendrera un cône, ayant pour sommet σ. Pour trouver ce cône, nous définirons la droite mobile comme l'intersection du plan P avec un cône ayant pour sommet σ et pour base la courbe d'intersection de H avec S.

Pour former l'équation de ce cône, transportons les axes au point σ. L'équation de la surface S est

$$(S) \qquad y(z+2p) = px$$

et celle de H

$$(H) \quad x^2(\lambda^2-1) - y^2 + 2\lambda xz + 2p\lambda(2x+y) = 0.$$

De S on tire

$$p = \frac{yz}{x-2y}$$

et, en substituant dans l'équation,

$$x^2(\lambda^2-1) - y^2 + 2\lambda xz + \frac{2\lambda yz}{x-2y}(2x+y) = 0,$$

équation homogène et du troisième degré, qui représente le cône auxiliaire.

Enfin, en éliminant λ entre cette équation et celle de P

$$x + \lambda z = 0$$

il vient, pour l'équation du lieu,

$$x^4(x-2y) - z^2(3x-2y)(x^2+y^2) = 0,$$

ce qui représente un cône du cinquième degré. Construi-

sons sa trace sur le plan des xy; en posant $z^2 = 4p^2$, on a une courbe ayant pour centre l'origine, qu'on construit en posant $y = tx$.

Note. — MM. Lévy et Hioux, professeur au lycée de Rennes, nous ont adressé une double solution analytique et géométrique; M. Gambey a envoyé une solution purement analytique.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. BOURGUET

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 185);

SOLUTIONS DE M. H.-J. KRANTZ.

1° *Prouver que*

$$\mathrm{L}\frac{n+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \mathrm{L}\frac{n+1}{m}$$

(L *désigne le logarithme népérien* $m \gtreqless 1$).

2° *Prouver que la série*

$$a^{\frac{1}{m}} + a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}} + a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}} + \ldots$$

est convergente pour $a < \frac{1}{e}$, *et divergente pour* $a \gtreqless \frac{1}{e}$.

3° *Prouver que la série*

$$\frac{m}{n} + \frac{m(m+1)}{n(n+1)} + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

est convergente pour $n - m > 1$, *et divergente pour* $n - m \leqq 1$.

1° La fonction $\frac{1}{x}$ étant décroissante, on a évidemment

$$\frac{1}{m} > \int_m^{m+1} \frac{dx}{x}.$$

De plus, en considérant l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, on voit sans difficulté que l'aire de cette courbe, comprise entre l'axe des x et les ordonnées qui sont aux distances $m - \frac{1}{2}$ et $m + \frac{1}{2}$ de l'origine, est plus grande que le rectangle qui a l'unité pour base et dont la hauteur est $\frac{1}{m}$, de sorte que l'on a

$$(1) \qquad \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{m}.$$

On peut d'ailleurs établir directement cette inégalité de la manière suivante :

Pour toute valeur de $x < m$, on a numériquement

$$\frac{m}{m^2 - x^2} > \frac{1}{m} \quad \left(\text{pour } x = 0,\ \frac{m}{m^2 - x^2} = \frac{1}{m}\right);$$

donc aussi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m\,dx}{m^2 - x^2} > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{m},$$

ou

$$\log \frac{m + \frac{1}{2}}{m - \frac{1}{2}} > \frac{1}{m},$$

ce qui revient à l'inégalité (1).

On peut donc établir

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{m} > \int_m^{m+1} \frac{dx}{x}.$$

Remplaçant m successivement par $m + 1$, $m + 2$,

jusqu'à n, on trouve, en ajoutant,

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \int_{m}^{n+1} \frac{dx}{x},$$

ou

$$\log \frac{n+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \log \frac{n+1}{m}.$$

Remarque. — On voit par les calculs précédents qu'il est suffisant et nécessaire que m satisfasse à la condition

$$m \geqq \frac{1}{2}.$$

2° Soit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ une série ayant u_x pour terme général; on sait (par un théorème qui est, je crois, de *Raabe*) que cette série sera convergente, ou divergente, selon que l'une des expressions

$$x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right), \quad \left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) - 1\right] \log x,$$
$$\left\{\left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) - 1\right] \log x\right\} \log\log x, \quad \ldots$$

approche d'une limite k, qui est plus grande ou plus petite que l'unité, x augmentant indéfiniment. Pour $k = 1$, il est douteux si la série sera, ou non, convergente.

La loi de la formation de ces expressions est évidente. En désignant par F_n et F_{n+1} deux de ces expressions successives, on a

$$F_{n+1} = n \log x (F_n - 1).$$

Le terme général de la série proposée est

$$u_x = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+x-1}};$$

donc

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} = a^{-\frac{1}{m+x}}$$

et

$$x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) = \frac{a^{-\frac{1}{m+x}} - 1}{\frac{1}{x}}.$$

Cette expression prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = \infty$; par les procédés ordinaires, on trouve, x augmentant indéfiniment,

$$\lim x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) = \log\frac{1}{a}.$$

La série est donc convergente, ou divergente, selon qu'on a

$$\log\frac{1}{a} > \text{ ou } < 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a \lessgtr \frac{1}{e}.$$

Pour $a = \frac{1}{e}$, le cas reste douteux, et il faut prendre l'expression

$$\left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) - 1\right]\log x = \left[x\left(e^{\frac{1}{m+x}} - 1\right) - 1\right]\log x,$$

dont la valeur réelle pour $x = \infty$ est nulle, c'est-à-dire plus petite que l'unité; donc la série est divergente pour $a = \frac{1}{e}$.

3° Ici on a, pour le terme général,

$$u_x = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+x-1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+x-1)};$$

donc

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} = \frac{n+x}{m+x},$$

et, appliquant le même théorème que dans le cas précédent,

$$\lim x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}}-1\right)=\lim\frac{x(n-m)}{m+x}=n-m.$$

Donc la série est convergente ou divergente selon que

$$n-m \gtrless 1.$$

Pour $n-m=1$, il faut prendre

$$\left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}}-1\right)-1\right]\log x=-m\frac{\log x}{m+x},$$

dont la valeur réelle pour $x=\infty$ est nulle, ce qui prouve la divergence pour $n-m=1$.

Note. — M. Fauquembergue a envoyé une solution analogue de la troisième partie.

SUR UNE QUESTION DE MINIMUM;

PAR LE P. LE COINTE, S. J.,
Professeur à l'école de l'Immaculée Conception, à Toulouse.

Soient

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_m$$

m fonctions linéaires de n variables $x, y, z, \ldots, w$, *et,* X_i *désignant d'une manière générale l'une de ces fonctions, posons*

$$X_i=a_ix+b_iy+c_iz+\ldots+k_iw+l_i.$$

Considérons la somme S *des carrés de ces m fonctions,*

et proposons-nous d'en trouver le minimum, dont l'existence est évidente (*).

Nous désignerons par μ la valeur de ce minimum, et par

(1) $$x = \alpha,\quad y = \beta,\quad z = \gamma,\quad \ldots,\quad w = \rho$$

le système de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w$ donnant ce minimum.

La fonction S est du second degré par rapport à chacune de ces variables; nous pouvons donc poser

(2) $$Ax^2 + Bx + C = S,$$

A étant une quantité indépendante de $x, y, z, \ldots, w$, B et C des quantités indépendantes de x et fonctions de $y, z, \ldots, w$.

De cette équation (2) nous tirons

(3) $$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4A(C - S)},$$

et il est aisé de constater que les valeurs

$$y = \beta,\quad z = \gamma,\quad \ldots,\quad w = \rho,$$

jointes à la valeur $S = \mu$, annulent l'expression

(4) $$B^2 - 4A(C - S)$$

placée sous le radical dans l'équation (3); car les valeurs (1) avec $S = \mu$ vérifient l'une ou l'autre des deux équations (3), en lesquelles se trouve décomposée l'équation (2); et, comme la valeur $x = \alpha$ est réelle, si l'expression (4) n'était pas annulée par ces valeurs, elle serait nécessairement égale à un nombre $\lambda^2 > 0$; comme

(*) Cette question est souvent posée aux examens d'admission à l'École Polytechnique.

elle est une fonction continue des quantités y, z, ..., w, S, si l'on venait à donner à ces quantités de nouvelles valeurs β', γ', ..., ρ', μ', très-peu différentes des précédentes, celle de S étant choisie moindre que μ, on aurait, pour l'expression (4), une valeur dans le voisinage de λ^2, et par conséquent positive. La valeur correspondante α' de x, fournie par l'une ou l'autre des équations (3), serait réelle, et, par suite, le système des valeurs

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad z = \gamma', \quad \ldots, \quad w = \rho'$$

donnerait, pour la fonction S, une valeur μ' moindre que la valeur minimum μ de cette fonction, ce qui est impossible.

De cette première propriété résulte que les valeurs (1) donnent

$$x = -\frac{B}{2A},$$

puisque, dans les équations (3), le radical est nul pour ces valeurs jointes à la valeur $S = \mu$. Or, cette dernière équation pouvant s'écrire sous la forme

$$2Ax + B = 0,$$

on voit que son premier membre est la dérivée S'_x du premier membre de l'équation (2), prise par rapport à x.

Ce que nous venons de dire pour la variable x s'applique à chacune des autres variables de la fonction S, et par conséquent nous arrivons à la conclusion suivante, savoir :

Que les valeurs des n variables x, y, z, ..., w de la fonction S *qui fournissent le minimum de cette fonction sont une solution du système des n équations*

linéaires

$$(5)\quad \frac{1}{2}S'_x = 0,\quad \frac{1}{2}S'_y = 0,\quad \frac{1}{2}S'_z = 0,\quad \ldots,\quad \frac{1}{2}S'_w = 0,$$

obtenues en égalant à zéro les moitiés des dérivées partielles de cette même fonction, prises par rapport à chacune de ces variables.

Relativement à la question précédente, nous allons établir plusieurs théorèmes qui serviront à compléter ce qui vient d'être dit, et nous y ferons usage de la notation suivante.

Ayant écrit m suites (ou lignes) de n quantités, de façon que les termes de même rang se correspondent en colonnes verticales, nous placerons de chaque côté de ce tableau un double trait vertical, de telle sorte que les m suites seront enfermées entre ces deux doubles traits, et le tableau ainsi constitué représentera le système de déterminants obtenus en supprimant, de toutes les manières possibles, $(m-n)$ lignes si m est $> n$, ou $(n-m)$ colonnes si m est $< n$ (*). Dans le cas de $m = n$, ce tableau représentera simplement le déterminant des m^2 éléments qui y figureront.

THÉORÈME I. — *Si m est $\geqq n$, le déterminant du système des équations* (5) *est égal à la somme des carrés des déterminants représentés par la notation*

$$(6)\qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & k_m \end{matrix} \right\|.$$

(*) Cette notation n'est pas nouvelle; elle est employée dans les *Leçons d'Algèbre supérieure* de G. SALMON.

Démonstration. — Pour établir cette proposition, et afin de mieux fixer les idées, nous supposerons $n = 3$. On reconnaîtra sans peine que cette hypothèse n'ôte rien à la généralité de la démonstration.

Le déterminant des équations (5) est alors

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m & a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m & b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_m c_m \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m & b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_m c_m & c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_m^2 \end{vmatrix},$$

et il est à remarquer que chacun des 9 éléments de ce déterminant est un polynôme de m termes.

Si l'on désigne par (r, s, t) l'un des arrangements 3 à 3 des m nombres 1, 2, 3, ..., m, chacun de ces nombres pouvant entrer plusieurs fois dans le même arrangement, et par $\Delta_{r,s,t}$ le déterminant de 9 éléments, obtenu en remplaçant, dans le déterminant (7), les éléments de la première colonne respectivement par leurs termes de rang r, ceux de la seconde colonne respectivement par leurs termes de rang s, et enfin ceux de la troisième respectivement par leurs termes de rang t, on sait que ce déterminant (7) est la somme de tous les déterminants tels que $\Delta_{r,s,t}$ obtenus en variant de toutes les manières possibles l'arrangement (r, s, t).

Or on a

$$\Delta_{r,s,t} = \begin{vmatrix} a_r^2 & a_s b_s & a_t c_t \\ a_r b_r & b_s^2 & b_t c_t \\ a_r c_r & b_s c_s & c_t^2 \end{vmatrix} = a_r b_s c_t \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{vmatrix},$$

et par suite, si deux des nombres r, s, t sont égaux, il vient

$$\Delta_{r,s,t} = 0.$$

De plus, si l'on suppose que les trois nombres r, s, t soient distincts entre eux, il est à observer que, dans l'ex-

pression ci-dessus de $\Delta_{r,s,t}$, le premier facteur $a_r b_s c_t$ est le terme principal du déterminant qui figure comme second facteur, de sorte que, si l'on forme tous les déterminants tels que $\Delta_{r,s,t}$ qui correspondent à toutes les permutations des trois nombres r, s, t, la somme de tous ces déterminants sera le carré du suivant :

$$\begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{vmatrix}.$$

Donc, etc.

Remarque. — Si $n = 2$, la relation, objet du théorème précédent, n'est autre que celle qui est connue sous le nom d'*identité de Lagrange*.

Théorème II. — *Si m est $\geqq n$, et que les déterminants représentés par la notation* (6) *ne soient pas tous nuls, le minimum de la somme* S *est égal à la somme des carrés des déterminants représentés par la notation*

$$(8) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & k_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & k_2 & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & c_m & \dots & k_m & l_m \end{matrix} \right\|,$$

divisée par la somme des carrés des déterminants représentés par la notation (6).

Démonstration. — Rendons la fonction S homogène par l'introduction d'une nouvelle variable ζ, c'est-à-dire que nous posons

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots + k_i w + l_i \zeta.$$

Désignons par Δ le déterminant des équations homo-

gènes

(9) $\frac{1}{2}S'_x = 0, \quad \frac{1}{2}S'_y = 0, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}S'_w = 0, \quad \frac{1}{2}S'_\zeta = 0,$

et par Δ_p^q ce qu'il devient lorsqu'on y supprime la ligne de rang p et la colonne de rang q.

Si

(10) $x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad \ldots, \quad w = \rho, \quad \zeta = 1$

est le système de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w, \zeta$ qui vérifient les n premières des équations (9), c'est-à-dire le système de valeurs de ces variables qui donnent le minimum de la fonction S, on a

$$\alpha = (-1)^n \frac{\Delta_{n+1}^1}{\Delta_{n+1}^{n+1}}, \quad \beta = (-1)^{n-1} \frac{\Delta_{n+1}^2}{\Delta_{n+1}^{n+1}},$$
$$\gamma = (-1)^{n-2} \frac{\Delta_{n+1}^3}{\Delta_{n+1}^{n+1}}, \ \ldots, \ \rho = (-1) \frac{\Delta_{n+1}^n}{\Delta_{n+1}^{n+1}}.$$

De plus, si, pour abréger, nous désignons par

$$M_1, \ M_2, \ M_3, \ \ldots, \ M_n, \ M_{n+1}$$

les $(n+1)$ éléments de la dernière ligne du déterminant Δ, l'expression de $\frac{1}{2}S'_\zeta$ est

$$M_1 x + M_2 y + M_3 z + \ldots + M_n w + M_{n+1} \zeta.$$

Or, le théorème des fonctions homogènes donne

$$x.S'_x + y.S'_y + z.S'_z + \ldots + w.S'_w + \zeta.S'_\zeta = 2S,$$

et par suite, pour le système des valeurs (10), il vient

$$S = M_1 \alpha + M_2 \beta + M_3 \gamma + \ldots + M_n \rho + M_{n+1}$$
$$= \frac{(-1)^n}{\Delta_{n+1}^{n+1}} [M_1 \Delta_{n+1}^1 - M_2 \Delta_{n+1}^2 + M_3 \Delta_{n+1} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} M_n \Delta_{n+1}^n + (-1)^n M_{n+1} \Delta_{n+1}^{n+1}],$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\Delta}{\Delta_{n+1}^{n+1}}.$$

Mais, d'après le théorème I, Δ_{n+1}^{n+1} et Δ sont respectivement les sommes des carrés des déterminants représentés par les notations (6) et (8).

Donc, etc.

THÉORÈME III. — *Si m est $\geqq n$, et que les déterminants représentés par la notation* (6) *soient tous nuls, la fonction* S *peut être ramenée à la somme des carrés de m fonctions linéaires de $(n-1)$ variables.*

Démonstration. — Car, si l'on pose, d'une manière générale,

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + k_i w,$$

les fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_m$ sont telles que $(m-n+1)$ quelconques d'entre elles sont des fonctions linéaires homogènes des $(n-1)$ autres, par exemple $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ et, par suite, la fonction S peut être considérée comme la somme des carrés de m fonctions linéaires aux $(n-1)$ variables $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$.

Donc, etc.

Remarque. — Dans ce cas, déterminant les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ de ces variables qui fournissent le minimum de S, on pourra déterminer une infinité de systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w$ correspondant à ce minimum, en résolvant les équations

$$V_1 = \alpha_1, \quad V_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad V_{n-1} = \alpha_{n-1}.$$

THÉORÈME IV. — *Si m est $< n$, et que les déterminants représentés par la notation* (6) *ne soient pas tous nuls, le minimum de la fonction* S *est zéro, et corres-*

pond à une infinité de systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w$.

Démonstration. — Car, si, pour fixer les idées, nous supposons, par exemple, $m = 2$, et que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul, on peut donner aux variables $z, \ldots, w$ des valeurs quelconques et déduire ensuite pour x et y des valeurs telles qu'on ait

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0.$$

Donc, etc.

Théorème V. — *Si* m *est* $< n$, *et que les déterminants représentés par la notation* (6) *soient tous nuls, la fonction* S *peut être ramenée à la somme des carrés de* m *fonctions linéaires de* $(n-1)$ *variables.*

Démonstration semblable à celle du théorème III.

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PROPOSÉE EN 1878

AUX CANDIDATS AUX BOURSES D'ÉTUDES PRÉPARATOIRES A LA LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. ED. GUILLET,

Maître répétiteur au lycée de Lyon.

Un point et une droite étant donnés, un cercle de rayon variable est tangent à la droite et passe par le point. Trouver le lieu des points du cercle pour lesquels la tangente est perpendiculaire à la droite donnée.

Je prends pour axe des y la droite Oy donnée, pour axe des x une perpendiculaire OA passant par le point fixe A.

En désignant par a la distance OA, par (α, β) les coordonnées variables du centre C du cercle, l'équation

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$$

représente l'un quelconque des cercles de la série, en tenant compte des deux conditions

$$(2)\qquad r - \alpha = 0,$$

$$(3)\qquad a^2 - 2\alpha a + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Mais les points M, M′ du lieu sont à l'intersection du cercle et de la droite menée par le centre C parallèlement à Oy, droite dont l'équation est

$$(4)\qquad x - \alpha = 0.$$

Il suffit d'éliminer α, β, r entre les quatre relations précédentes pour obtenir l'équation du lieu

$$y^4 - 2y^2(x^2 + 2ax - a^2) + (x-a)^4 = 0$$

ou

$$[(y-x)^2 - a(2x-a)][(y+x)^2 - a(2x-a)] = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc de deux paraboles, symétriques par rapport à l'axe des x, tangentes à cet axe au point fixe donné, et ayant pour axes les deux droites

$$2(y-x) + a = 0,$$
$$2(y+x) - a = 0.$$

En remarquant que le centre C est toujours à égale distance du point fixe et de la droite donnée, le problème se ramène au suivant :

Trouver le lieu des points obtenus en augmentant et diminuant l'ordonnée de chaque point d'une parabole d'une quantité égale à la distance de ce point à la directrice.

ENVELOPPE DE LA DROITE DE SIMPSON;

PAR M. BADOUREAU,
Ingénieur des Mines.

On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite, et que, si le point décrit le cercle, la droite enveloppe une courbe du quatrième degré à trois points de rebroussement.

Cette question peut être traitée par le calcul de la manière suivante.

Prenons d'abord l'origine au centre du cercle, et soient α, β, γ, φ les coordonnées angulaires des sommets A, B, C du triangle et du point F choisi sur le cercle. Prenons l'axe des x de telle sorte qu'on ait $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

Le côté $\alpha\beta$ et la perpendiculaire φc abaissée du point φ sur ce côté ont pour équations

$$(1)\qquad -x\cos\frac{\gamma}{2}+y\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$(2)\qquad x\sin\frac{\gamma}{2}+y\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\varphi\right),$$

pourvu qu'on prenne comme unité le rayon du cercle. Multiplions l'équation (1) par $\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}$ et l'équation (2) par $\cos\frac{\gamma-\varphi}{2}$, et ajoutons membre à membre; il vient

$$(3)\qquad x\sin\frac{\varphi}{2}+y\cos\frac{\varphi}{2}=\sin^3\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}\sin\frac{\beta-\varphi}{2}\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}.$$

Cette équation, symétrique par rapport à α,β,γ, représente la droite abc. En transportant l'origine au centre

du cercle des neuf points, qui a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma),$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

l'équation devient

$$(4) \qquad x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}.$$

L'enveloppe de cette droite est l'hypocycloïde représentée par les deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi, \\ y = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi. \end{cases}$$

En éliminant φ, on obtient l'équation du quatrième degré

$$(6) \qquad (4x^2 + 4y^2 + 24x + 9)^2 = 4(4x + 3)^3.$$

Cette courbe a trois points de rebroussement aux sommets d'un triangle équilatéral MNP.

En prenant ce triangle comme triangle de référence, on obtient l'équation homogène

$$(7) \qquad (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = 4\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma).$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0.$$

Cette équation se décompose en trois autres qui représentent respectivement les trois arcs de courbe li-

mités aux points de rebroussement :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}},\\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},\\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \end{aligned}\right.$$

En terminant, il est à peine utile d'ajouter que le lieu est tangent aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle donné ABC.

DIVISIBILITÉ PAR 19;

PAR M. BADOUREAU,
Ingénieur des Mines.

L'unité suivie de 9 zéros étant un multiple de 19 moins 1, il est facile de trouver un nombre de neuf chiffres qui donne le même résidu par rapport à 19 qu'un nombre donné quelconque.

Considérons l'équation $10^9 = m.19 - 1$; élevons ses deux membres à une puissance impaire quelconque, et multiplions-les par une puissance quelconque de 2; il vient

$$(1)\qquad 10^{18p+9}.2^n = m.19 - 2^n.$$

Considérons l'équation $20 = 19 + 1$ et élevons ses deux membres à la puissance n; il vient

$$(2)\qquad 2^n.10^n = m.19 + 1.$$

Pourvu que p soit assez grand, on pourra diviser

membre à membre les deux équations précédentes et il viendra

$$(3) \qquad 10^{18p+9-n} = m.19 - 2^n.$$

En particulier, on a

$$10^8 = m.19 - 2,$$
$$10^7 = m.19 - 2^2,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$10^0 = m.19 - 2^9.$$

La règle à suivre découle directement de ces formules. Cette règle est susceptible d'être généralisée et appliquée, quelle que soit la base, à tout nombre tel, qu'en l'augmentant ou en le diminuant d'une unité on obtienne un diviseur d'une puissance de la base.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1878).

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET MÉCANIQUE.

I. — *Mathématiques élémentaires.*

On donne un cercle S, un triangle inscrit ABC et deux points P et P′ sur la circonférence du cercle. On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des points P et P′ sur les trois côtés du triangle sont respectivement sur deux droites D et D′.

1° Démontrer que le point de rencontre M des droites D et D′ décrit un cercle S′, quand le sommet C du triangle se meut sur la circonférence du cercle S, les points A, B, P, P′ restant fixes.

2° Trouver le lieu des centres des cercles S', les points A et B restant fixes et les points P et P' se déplaçant sur la circonférence S de telle sorte que l'arc PP' conserve une longueur constante.

II. — *Mécanique élémentaire.*

Trois poids donnés P, P', P'' sont supportés par trois fils flexibles et sans masse; ces fils passent respectivement par trois anneaux fixes, infiniment petits, A, B, C, placés d'une façon quelconque dans l'espace, et vont se réunir en un même nœud O.

On demande la position de ce nœud dans l'état d'équilibre.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une sphère S, un plan P et un point A; par le point A on mène une droite qui rencontre le plan P en un point B, puis, sur AB comme diamètre, on décrit une sphère S'; le plan radical des sphères S et S' rencontre la droite AB en un point M.

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand la droite AB tourne autour du point A.

2° Discuter le lieu précédent en supposant que le point A se déplace dans l'espace, le plan P et la sphère S restant fixes.

Composition sur une question de méthode ou d'histoire des Mathématiques.

Exposer la marche à suivre pour discuter une courbe dont on connaît l'équation en coordonnées polaires. — Donner des exemples.

Nota. — On regardera comme connues les formules relatives à la détermination des tangentes, des points d'inflexion et des asymptotes.

ÉPREUVES ORALES.

Mathématiques élémentaires.

1. Première leçon de Cosmographie.
2. Figures symétriques.
3. Des logarithmes (Mathématiques élémentaires).
4. Première leçon de Trigonométrie.
5. Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

6. Division des nombres entiers. — Division des nombres décimaux.

7. Maximum et minimum de l'expression $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

8. Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Discussion des valeurs générales.

9. Polygones réguliers de quatre, six, dix côtés, et polygones réguliers qui s'en déduisent.

10. Mesure des angles.

11. Surface des corps ronds.

12. Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales. — Fractions périodiques.

13. Première leçon sur la mesure des volumes.

14. Mouvement propre du Soleil.

15. Rabattements. — Changement de plans. — Rotations.

16. Centre de gravité du triangle, du trapèze, du quadrilatère quelconque, du polygone.

17. Plus grand commun diviseur. — Plus petit commun multiple.

18. Volume de la sphère.

19. Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

20. Formules $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$. — Formules élémentaires de la multiplication des arcs.

21. Principaux caractères de divisibilité.

Mathématiques spéciales.

1. Plan tangent.—Applications aux surfaces du second ordre.

2. Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la section a des branches infinies.

3. Étant donné $\cos a$, trouver $\cos \frac{a}{m}$; étant donné $\sin a$ trouver $\sin \frac{a}{m}$. — Discussion. — Cas des racines multiples.

4. Exposer les principales méthodes qui permettent de reconnaître la nature d'une surface du second ordre dont on a l'équation.

5. Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes.

6. Sections circulaires dans les surfaces du second ordre. — Cas où la surface est rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

8. Application de la théorie des dérivées à l'étude des fonctions d'une seule variable (Exemples).

9. Règle des signes de Descartes.

10. Étude de la fonction exponentielle a^x. — Des logarithmes considérés comme exposants.

11. Recherche de l'équation d'une surface définie géométriquement (Exemples).

12. Approximation des racines. — Méthode de Newton.

13. Théorème des projections. — Application à la

transformation des coordonnées dans la Géométrie de l'espace.

14. Des plans diamétraux et des diamètres dans les surfaces du second ordre.

15. Sections rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

16. Théorème de Rolle. — Application à la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

17. Intersection de deux courbes du second degré (Solution du problème au moyen d'une équation du troisième degré). — Discussion.

18. Distance de deux points, d'un point à un plan, d'un point à une droite. Plus courte distance de deux droites (Géométrie analytique).

19. Réduction de l'équation générale du second ordre à trois variables à ses formes les plus simples en coordonnées rectangulaires.

20. Résolution de l'équation du troisième degré (Algèbre).

21. Transformation des équations (Exemples).

ÉPREUVE PRATIQUE DE CALCUL.

Calculer les côtés et les angles d'un triangle, sachant :

1° Que son périmètre est $22^{m},80$;

2° Que le rayon du cercle inscrit est $1^{m},90$;

3° Que le rayon du cercle circonscrit est $4^{m},75$.

COMPOSITION SUR LES MATIÈRES DE LA LICENCE.

Une tige rectiligne, dont on négligera l'épaisseur, peut tourner autour d'un axe vertical Oz, qu'elle rencontre en O et avec lequel elle fait constamment un angle donné θ ; son moment d'inertie A, par rapport à Oz, est aussi donné.

Sur cette tige peut glisser librement un anneau infini-

ment petit de masse m. On donne la vitesse angulaire initiale Ω du mouvement de rotation de la tige autour de l'axe, la distance initiale R de l'anneau mobile au point O, la vitesse initiale R' de l'anneau sur la tige.

On propose d'étudier le mouvement de rotation de la tige autour de l'axe et le mouvement de l'anneau sur la tige.

Dans la discussion, on examinera le cas où la vitesse relative initiale R' est dirigée ou non vers le point O et le cas où elle est nulle.

Enfin, on étudiera plus spécialement le cas où la tige reste horizontale.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Construire l'intersection d'une sphère et d'un ellipsoïde dont l'axe moyen est vertical.

Données. — Le centre (O, O′) de la sphère se projette horizontalement à $0^m,07$ en avant du plan vertical et verticalement à $0^m,075$ au-dessus du plan horizontal.

Le centre (c, c') de la sphère se projette horizontalement à $0^m,08$ en avant du plan vertical et verticalement à $0^m,07$ au-dessus du plan horizontal.

Les lignes de rappel (O, O′) (c, c') sont distantes de $0^m,04$.

Le rayon de la sphère est de $0^m,06$.

L'axe moyen de l'ellipsoïde, lequel est vertical, a $0^m,14$.

Le grand axe a $0^m,16$; il fait un angle de 45 degrés avec le plan vertical de projection (son sommet le plus rapproché du plan vertical est celui qui est le plus éloigné de la sphère).

Le petit axe a $0^m,12$.

Pour distinguer les parties de l'intersection qui sont vues de celles qui sont cachées, on supposera l'ellipsoïde enlevé.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Calcul infinitésimal; par *J. Hoüel*, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — 3 vol. gr. in-8°. Prix pour les souscripteurs : 30 fr. — Paris, Gauthier-Villars, 1878-1879. (Le t. I vient de paraître.)

Bien qu'il s'agisse d'un Ouvrage en cours de publication, il nous paraît dès à présent utile de signaler ce livre, dont le deuxième fascicule vient d'être mis tout récemment en vente par la librairie Gauthier-Villars.

Le Cours de Calcul infinitésimal de M. Hoüel a été rédigé par lui, en s'inspirant surtout du Cours qu'il professe, depuis de longues années déjà, à la Faculté de Bordeaux, et qui avait été publié antérieurement, en deux brochures autographiées; mais l'ordre des matières, les modifications apportées dans l'exposition, et surtout le soin extrême donné à tout ce qui concerne les questions de méthode, en font une œuvre bien réellement nouvelle et qui ne peut manquer d'être favorablement accueillie du public mathématique.

Malgré le grand nombre de livres publiés sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral, on doit reconnaître que nous ne sommes pas encore en possession d'un Ouvrage à la fois assez complet pour renfermer ce qu'il y a d'essentiel dans les progrès de la Science actuelle, et assez élémentaire pour être considéré comme un livre d'étude pour les candidats à la licence. Le Traité de M. Hoüel est appelé, selon nous, à combler en grande partie cette lacune; nous disons *en grande partie*, car on sait bien qu'en matière de Science il faut plus que la lecture d'un seul Ouvrage, si excellent soit-il, pour posséder entièrement, pour s'assimiler d'une manière complète les principes et les méthodes.

Ce qui frappe tout d'abord dans le Cours en question et ce qui lui donne un caractère particulièrement original, c'est que l'auteur y a complétement renoncé à l'ancienne division clas-

sique : Calcul différentiel, Calcul intégral. Il a pensé avec raison que la notion des différentielles et celle des intégrales sont difficilement séparables, et il a jugé utile d'aborder les difficultés à mesure que l'enchaînement naturel des idées vient les présenter à l'esprit.

La remarquable Préface placée en tête de l'Ouvrage nous apprend que celui-ci doit se diviser en six Livres. Deux seulement ont paru dans le Tome premier; ils sont précédés d'une *Introduction*, divisée en trois Chapitres, et sur laquelle nous appelons toute l'attention du lecteur, car les notions qui s'y trouvent exposées sont de nature à préciser et à élever les idées sur la Science mathématique en général, et principalement sur l'Analyse. On trouve d'abord des considérations générales sur les opérations et sur le calcul des opérations; puis, dans le deuxième Chapitre, une généralisation successive de l'idée de quantité, consistant à envisager tout d'abord les quantités arithmétiques, puis les quantités algébriques, puis les quantités complexes à deux dimensions; ce Chapitre se termine par le théorème fondamental de la théorie des équations : *Toute équation a une racine*. Le troisième Chapitre de l'Introduction donne, en cinquante pages environ, une exposition assez complète de la théorie des déterminants.

Le Livre I a pour titre : *Principes fondamentaux du Calcul infinitésimal.* Il est subdivisé en deux Chapitres comprenant les matières que voici : Des fonctions et de la continuité. — Infiniment petits et infiniment grands. — Limites. — Substitution des infiniment petits. — Dérivées et différentielles. — Intégrales. — Méthodes de différentiation et d'intégration. — Différentielles et dérivées partielles; leurs propriétés.

Dans le Livre II sont traitées les applications analytiques du Calcul infinitésimal. Ce Livre comprend trois Chapitres, dont le premier est relatif aux développements des fonctions en séries.

On y trouve les théorèmes de Taylor et de Maclaurin, les propriétés générales des séries, et enfin des développements sur les fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe.

Le deuxième Chapitre se rapporte aux applications analytiques du Calcul différentiel, et renferme les vraies valeurs, les maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables, et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.

Enfin, le troisième Chapitre a pour titre : *Intégration des fonctions explicites*. Il contient l'intégration des fonctions rationnelles et irrationnelles, les différentielles binômes, la différentiation et l'intégration sous le signe $\int$, les changements de variables dans les intégrales multiples, des notions sur le calcul des intégrales définies (exact ou approché) et aussi sur les intégrales eulériennes.

Ajoutons que chaque Livre (de même que l'Introduction) est suivi d'une collection d'Exercices extrêmement bien choisis et qui seront certainement d'un grand secours aux élèves.

Nous regrettons de ne pouvoir nous arrêter plus longtemps sur ce remarquable Ouvrage et d'être obligé de nous borner à une sèche énumération des matières, en mettant pour ainsi dire toute appréciation de côté. Lorsque l'Ouvrage entier sera terminé, nous nous réservons d'y revenir, de l'examiner alors plus en détail et de dire ce que nous en pensons d'une manière plus complète. S'il y a place alors pour quelques critiques sur tel ou tel point particulier, elles seront compensées et au delà par l'ensemble, à en juger par la partie de l'œuvre qui nous est déjà connue.

Nous devons, en terminant, rendre hommage à la perfection matérielle du livre, dont l'exécution fait le plus grand honneur à la Maison Gauthier-Villars ; bien qu'elle nous ait habitués à de véritables merveilles en cette matière, on se plaît toujours à constater avec admiration le caractère artistique des Ouvrages qui sortent de cette Imprimerie. Espérons qu'elle ne nous fera pas trop longtemps attendre la suite de l'Ouvrage de M. Hoüel, dont l'impression se poursuit chaque jour avec activité, si nos informations sont exactes. L.

Cours de Géométrie analytique; par *Joseph Carnoy*. Géométrie de l'espace. 2e édition. Grand in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 10 francs. — Paris, Gauthier-Villars; 1877.

La Géométrie analytique, jusqu'à ces derniers temps, a été réduite à l'emploi presque exclusif des coordonnées cartésiennes. On y a joint, depuis peu, les coordonnées trilatères et tétraédriques, mais sans les développer d'une manière systématique. La méthode analytique qui résulte de l'usage de ces différents systèmes suppose que les figures géométriques sont engendrées par le mouvement d'un point dont les coordonnées satisfont à une équation à deux ou à trois variables : c'est la méthode de Descartes. Aujourd'hui, on a imaginé une nouvelle Géométrie analytique basée sur un procédé corrélatif pour engendrer les courbes et les surfaces : on considère les unes comme provenant du déplacement continu d'une droite dans un plan, et les autres comme résultant du déplacement analogue d'un plan dans l'espace. De là dérivent les coordonnées tangentielles qui servent à la détermination de la droite et du plan mobile. On a négligé jusqu'ici, si l'on excepte les principes de Géométrie analytique de M. Painvin, de s'occuper de ces nouvelles coordonnées dans les Ouvrages élémentaires. L'auteur veut, dans ce Cours, combler cette lacune regrettable, développer suffisamment les principes et les formules fondamentales de chaque système de coordonnées, montrer ensuite comment, étant donné un certain ordre de propriétés connues et démontrées par la méthode de Descartes, on peut en déduire, avec les coordonnées tangentielles, un ordre correspondant de vérités géométriques différentes des premières. Tel a été son but.

Il commence par traiter le plan et la ligne droite suivant les coordonnées cartésiennes, qui servent de base à toutes les autres. Les questions qui s'y rattachent sont ensuite résolues d'après les autres systèmes, ce qui le conduit à quelques formules dignes d'être remarquées, telles que les relations entre les coefficients directeurs d'une droite, l'expression de la distance de deux

points, celle de la distance d'un point à un plan, etc. Avant d'aborder l'équation générale du second degré, il donne les équations de la sphère par rapport aux diverses coordonnées, ainsi qu'un court exposé des propriétés d'un système de sphères. Il arrive ensuite à l'étude des surfaces du second ordre : elle comprend la détermination du centre et des plans principaux, l'examen des caractères particuliers de chacune d'elles tirés des équations réduites, la recherche des lignes focales et des propriétés des surfaces homofocales, la discussion de l'équation du second degré en coordonnées tétraédriques, une série d'exercices et de problèmes avec les solutions indiquées.

Les limites de ce Cours ne lui permettent pas de s'occuper des courbes dans l'espace ou tracées sur une surface; cette théorie se rattache plus spécialement au Calcul infinitésimal, et c'est par les ressources de l'Analyse qu'il convient de la traiter. Il préfère faire connaître, en terminant, les méthodes les plus connues pour la recherche des propriétés générales des surfaces du second ordre et consacrer quelques Chapitres à la génération des surfaces, ainsi qu'à la démonstration de plusieurs théorèmes remarquables des surfaces réglées et des surfaces algébriques.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, par *Sturm*; 5e édition, revue et corrigée par M. *E. Prouhet*. 2 vol. in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 12 francs. — Paris, Gauthier-Villars; 1877.

Éléments d'Algèbre, par *Bourdon*; 15e édition, revue et annotée par M. *E. Prouhet*, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique. In-8°. Prix : 8 francs. — Paris, Gauthier-Villars; 1877.

L'Astronomie pratique et les Observatoires en

EUROPE ET EN AMÉRIQUE; 5e Partie : ITALIE; par *G. Rayet*. In-18 jésus, avec belles figures dans le texte. Prix : 4 fr. 50. — Paris, Gauthier-Villars, 1878.

THÉORIE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES (Théorie du potentiel), à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par M. *Bouty*. In-8°, avec figures dans le texte et une planche. Prix : 2 fr. 50 c. — Paris, Gauthier-Villars; 1878.

LEÇONS SUR L'ÉLECTRICITÉ, par *John Tyndall*; traduit de l'anglais, par *R. Francisque-Michel*. In-18, avec 58 figures dans le texte. Prix : 2 fr. 75 c. — Paris, Gauthier-Villars; 1878.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par *Eugène Rouché* et *Ch. de Comberousse*, renfermant un très-grand nombre d'exercices et plusieurs appendices consacrés à l'exposition des *principales méthodes de la Géométrie moderne*. 4e édition, revue et notablement augmentée. In-8°, avec 611 figures dans le texte et plus de 1100 questions proposées. Première Partie : Géométrie plane. Prix : 6 francs. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE; par *L. Maleyx*, professeur au Collége Stanislas. In-8°. Prix : 10 francs. — Paris, chez l'auteur, 212, rue Saint-Jacques; 1879.

Tirages à part.

Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$, par M. *G. de Longchamps*. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1878.

Des fractions étagées, par M. *G. de Longchamps*. Extrait du t. XV du *Giornale di Matematiche*.

Note sur la série harmonique, par M. *G. de Longchamps*. Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*; 1877.

Ricerche sulle equazioni differenziali a primitiva

generale algebrica; per *F. Casorati*. Extrait des *Transunti della reale Accademia dei Lincei*; 1877.

Sulle condizioni alle quali deve soddisfare una primitiva, affinchè il grado della corrispondente equazione differenziale, rispetto alle variabili, riesca minore del normale; per *F. Casorati*. Extrait des *Rendiconti del R. Istituto lombardo*; 1878.

Exposition succincte de quelques méthodes d'élimination entre deux équations; par M. *Forestier*. Extrait des *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 7e série, t. IX.

Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées; par M. *Ed. Dewulf*. Extrait du *Bulletin de Darboux*, 2e série, t. II.

Sur quelques propriétés des polygones; par M. *Laisant*. Extrait des *Travaux de l'Association française pour l'avancement des Sciences*; 1877.

Note sur un théorème sur les mouvements relatifs; par M. *Laisant*. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1878.

Sur le problème de la composition des accélérations d'ordre quelconque; par M. *Ph. Gilbert*. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1878.

Sur l'extension aux mouvements plans relatifs de la méthode des normales et des centres de courbure; par M. *Ph. Gilbert*. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*; 1878.

Una transformacion de curvas planas ; per *Ed. Habich*. Extrait de *El Siglo*, n° 37. Lima; 1877.

Arithmetische Kleinigkeiten, von prof. Dr *Bachmann*. Extrait de la *Zeitschrift f. Mathematik u. Physik*, XX, 2.

SUR LA LIMITE DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION DE DEGRÉ QUELCONQUE;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS,
Professeur de Mathématiques spéciales au collége Rollin.

On sait que les limites supérieures et inférieures des racines positives et négatives d'une équation donnée forment quatre nombres, dont la recherche se ramène, par la considération de l'équation aux inverses et de la transformée en $-x$, à celle de la seule limite supérieure des racines positives. Nous nous proposons d'exposer ici une méthode qui permet de déterminer celle-ci par un procédé que nous croyons nouveau et qui nous paraît simple et avantageux.

1. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

Elle peut s'écrire

$$x^{m-2}(x^2 + A_1 x + A_2) + x^{m-5}(A_3 x^2 + A_4 x + A_5) + \ldots = 0.$$

Supposons que tous les coefficients $A_3, A_6, A_9, \ldots$ soient positifs, et considérons les équations

$$\begin{gathered} x^2 + A_1 x + A_2 = 0, \\ A_3 x^2 + A_4 x + A_5 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Si α représente la plus grande des racines positives de ces différentes équations, il est clair que α et toute valeur supérieure étant substituée à x dans l'équation proposée donneront un résultat positif. Ainsi α sera une limite supérieure des racines positives.

2. L'objection que soulève aussitôt cette méthode de groupement, c'est que les coefficients $A_3, A_6, \ldots$, ou tout au moins quelques-uns d'entre eux, peuvent être nuls ou négatifs. Nous allons indiquer comment, dans cette hypothèse, on doit modifier le groupement des termes.

Supposons A_3 négatif, par exemple. L'équation proposée peut s'écrire

$$x^{m-2}(x^2 + A_1x + A_2 - \lambda) + x^{m-4}(\lambda x^2 + A_3x + A_4) + \ldots = 0,$$

λ désignant un nombre arbitraire, mais que nous supposerons positif. Cette transformation ayant été faite autant de fois que la chose sera nécessaire, on n'aura plus à considérer que des trinômes dont les premiers termes seront tous positifs et auxquels on pourra, par conséquent, appliquer la remarque que nous avons faite tout à l'heure.

3. L'introduction de ces arbitraires λ donne à cette méthode, qu'on pourrait, pour la distinguer des autres, nommer *méthode par la décomposition en trinômes*, un caractère particulier, tout à son avantage, et que nous voulons mettre en lumière. Au lieu d'effectuer, comme dans les méthodes connues, des calculs bien déterminés et dont il faut, en quelque sorte, subir la loi, on comprend qu'on pourra, par le choix plus ou moins habile qui sera fait des indéterminées, obtenir des limites plus ou moins avantageuses, c'est-à-dire plus ou moins petites. Nous allons éclaircir ce point important par un ou deux exemples numériques.

Considérons d'abord l'équation

$$x^7 + 4x^6 - 10x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 9 = 0 \ (*);$$

(*) Briot, *Algèbre*; 2e Partie, 8e édition, p. 293 et 295.

elle peut s'écrire

$$(1) \qquad x^5(x^2+4x-10-\lambda) \\ +x^3(\lambda x^2-13x+7)+(12x^2-9)=0.$$

Elle est ainsi décomposée en trois trinômes ; le dernier ne nous occupera pas, $x=1$ et les nombres supérieurs à 1 le rendant positif. Considérons les deux autres,

$$T = x^2+4x-10-\lambda,$$
$$T' = \lambda x^2-13x+7.$$

La racine positive de $T=0$ est

$$\alpha=\sqrt{14+\lambda}-2,$$

et la plus grande racine positive de $T'=0$, quand cette équation a ses racines réelles, est

$$\alpha'=\frac{13+\sqrt{169-28\lambda}}{2\lambda},$$

et l'on doit prendre pour limite supérieure des racines positives le plus grand des deux nombres α, α'. La valeur de λ qu'il faut choisir, celle qui donne la plus petite limite, est celle qui satisfait à l'équation $\alpha=\alpha'$.

En effet, quand λ croît en partant de zéro, α va constamment en augmentant et α' en diminuant. Soit λ' la valeur de λ qui rend $\alpha=\alpha'$; si l'on prend pour λ une valeur plus petite que λ', on aura pour α' une valeur plus grande que celle qui correspond à λ' ; au contraire, si l'on prend $\lambda>\lambda'$, on aura pour α une valeur plus grande que celle qu'on a obtenue en prenant $\lambda=\lambda'$. Dans l'un et l'autre cas, comme on doit prendre pour la limite cherchée le plus grand des deux nombres α et α', on aura donc pour cette limite un nombre plus grand que celui qu'on avait trouvé avec l'hypothèse $\lambda=\lambda'$.

4. Dans la pratique, la détermination de ce qu'on pourrait nommer *la valeur avantageuse de* λ, résultant d'une équation $\alpha = \alpha'$, qui est ordinairement d'un degré supérieur au second, offrira des difficultés qu'il ne faut pas chercher à surmonter autrement que *par à peu près* et comme nous allons l'indiquer. La recherche qui nous occupe doit, en effet, être faite par des calculs simples et suffisamment rapides, quoique conduisant pourtant à un nombre aussi voisin que possible de la plus grande racine positive. La meilleure méthode est évidemment celle qui sait concilier ces deux intérêts contraires.

Dans l'équation (1), donnons à λ les valeurs successives 1, 2, ..., et pour chacune d'elles calculons les valeurs correspondantes de α et de α', valeurs calculées rapidement, par à peu près, en remplaçant les quantités incommensurables qu'on rencontre par des nombres commensurables supérieurs et faciles à voir. On pourra former le tableau suivant :

λ	α	α'
1	2	12,5
2	2	6
3	2,2	4
4	2,3	2,6
5	2,4	1,9
.	.	.
.	.	.
.	.	.

En considérant la valeur $\lambda = 4$, on a pour limite 2,6. On voit aussi que la valeur avantageuse de λ est comprise entre 4 et 5. Si l'on veut avoir une limite moins élevée, il faut donner à λ les valeurs successives

$$4,1, \quad 4,2, \quad 4,3, \quad \ldots$$

et former le tableau suivant :

λ	α	α'
4,1	2,26	2,5
4,2	2,27	2,41
4,3	2,27	2,33
4,4	2,29	2,25
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Il résulte de ce tableau que 2,29 est une limite supérieure des racines positives de l'équation, et que la valeur avantageuse de λ est comprise entre 4,3 et 4,4. En donnant à λ les valeurs successives 4,31, 4,32, ..., on trouverait une limite moins élevée.

5. Considérons encore, pour bien faire comprendre l'avantage qu'on peut tirer de l'introduction des arbitraires, l'équation

$$6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60 = 0 \text{ (*)}.$$

On peut l'écrire

$$x^3(6x^2 + 24x - 1) + (8x^2 - 16x - 60) = 0,$$

et, en lui appliquant notre méthode, on trouve pour la limite

$$\frac{2 + \sqrt{34}}{2},$$

ou, *a fortiori*, en remplaçant 34 par 36, $\frac{2+6}{2} = 4$. La méthode de Newton, appliquée à cet exemple, donne une limite égale à 2. Nous allons faire voir que l'introduction

(*) CATALAN, *Manuel des candidats à l'École Polytechnique*, p. 155.

des arbitraires peut donner cette limite 2 et même une limite plus faible.

Écrivons l'équation sous la forme

$$x^3(6x^2+24x-\lambda)$$
$$+x[(\lambda-1)x^2+8x-\mu]+[(\mu-16)x-60]=0.$$

En choisissant

$$\lambda=72 \quad \text{et} \quad \mu=46,$$

on voit que $x=2$ est une limite supérieure des racines positives. Mais on peut choisir plus avantageusement les paramètres λ, μ; déterminons-les, en effet, de façon que les équations

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} (\mu-16)x-60=0, \\ 6x^2+24x-\lambda=0 \end{cases}$$

soient satisfaites par $x=1$; on trouve alors

$$\lambda=30, \quad \mu=76.$$

Le second trinôme est alors

$$29x^2+8x-76,$$

et la racine positive de ce trinôme égalé à zéro est

$$\frac{\sqrt{2220}-4}{29},$$

nombre plus petit que $\frac{3}{2}$: donc $\frac{3}{2}$ est une limite.

Pour obtenir une limite plus approchée, on disposera de λ et de μ, de façon que les équations (A) soient satisfaites pour une valeur de x intermédiaire entre le nombre 1 primitivement choisi et la limite $\frac{3}{2}$, par exemple pour

$x = \frac{5}{4}$. On trouve alors

$$\lambda = \frac{315}{8}, \quad \mu = 64,$$

et pour la limite $\frac{368}{307}$, ou, *a fortiori*, 1,2, nombre très-voisin de la plus grande racine positive, puisque l'équation proposée a une racine supérieure à 1.

6. Nous indiquerons, en terminant cette Note, le procédé général qui permet d'introduire les indéterminées λ et de leur assigner des valeurs avantageuses.

L'équation générale peut toujours s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} x^{m-2}(x^2 + A_1 x + A_2 - \lambda_1) \\ + x^{m-4}(\lambda_1 x^2 + A_3 x + A_4 - \lambda_2) \\ + x^{m-6}(\lambda_2 x^2 + A_5 x + A_6 - \lambda_3) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Lorsque m est pair, il y a $\frac{m-2}{2}$ arbitraires λ ; si m est impair, $\frac{m-1}{2}$. Le dernier trinôme, dans ce cas, se réduit à un binôme du premier degré en x. Dans tous les cas, les équations

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 + A_1 x + A_2 - \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 x^2 + A_3 x + A_4 - \lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

forment, en considérant

$$x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

comme des inconnues, un système d'équations simultanées bien défini, parce qu'il y a autant d'équations indépendantes que d'inconnues. Si l'on pouvait trouver

une solution de ce système, on aurait donc une racine x de l'équation donnée, et, si x était la plus grande racine positive, on peut dire que le problème qui nous occupe serait résolu *dans sa perfection*. La méthode que nous venons d'exposer a pour but de réaliser par tâtonnements et approximativement la résolution du système (B).

Ayant trouvé une première limite x_1, pour obtenir une limite moins élevée, on remplace x par x_2 dans les équations (B) (en supposant $x_2 < x_1$). On déterminera les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et il restera une dernière équation β, ne renfermant que x. S'il arrive que x_2 soit la plus grande racine positive des équations qui ont donné $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et si la plus grande racine positive de la dernière équation β est, elle aussi, plus grande que x_2, x_2 sera une nouvelle limite supérieure des racines positives de l'équation. Il faut aussi, bien entendu, que les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ soient tous positifs.

Nous ferons une dernière remarque. En écrivant l'équation générale sous la forme

$$x^{m-1}(x + A_1 - \lambda_1) + x^{m-2}(\lambda_1 x + A_2 - \lambda_2) + \ldots,$$

et considérant le système défini

$$\begin{aligned} x + A_1 - \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_1 x + A_2 - \lambda_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \end{aligned}$$

dans lequel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des nombres positifs, le nombre x qui rend ces différents binômes nuls ou positifs est une limite supérieure des racines positives. A ce groupement correspond une méthode, qu'on peut nommer *méthode par la décomposition en binômes*. Elle offre sur la précédente l'avantage de ne donner lieu qu'à des équations du premier degré; mais elle présente l'inconvénient d'exiger la considération de $(m-1)$ équa-

tions simultanées. La décomposition en polynômes d'un degré supérieur au second est en général impraticable, pour des motifs évidents; c'est donc la méthode par décomposition en trinômes qui nous paraît la plus avantageuse.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FOYERS DES COURBES ALGÉBRIQUES ET DES FOCALES DES CONES ALGÉBRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai donnée dans ma Note *sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* (*).

Étant données deux courbes quelconques K^m *et* K^n, *de classes respectivement égales à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites, qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Supposons, pour fixer les idées, que K^m soit une courbe réelle (ou du moins ayant une équation réelle), et soient $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ses m foyers réels; supposons, en outre, que K^n se réduise aux deux ombilics I et J du plan (**).

Les tangentes communes à K^m et à K^n se composent des systèmes de droites isotropes, se croisant aux foyers

(*) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. III, p. 174.

(**) J'appelle ainsi, pour abréger, les deux points situés à l'infini et communs à tous les cercles du plan.

$F_1, F_2, \ldots, F_m$. Étant donné un point quelconque M du plan, sa polaire relativement aux deux droites isotropes issues du foyer F_i est la droite menée par ce point perpendiculairement à MF_i; donc la polaire de M relativement aux tangentes communes à K^m et à K^n est la polaire de ce point relativement aux m droites menées respectivement par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point M.

Considérons d'autre part les diverses droites isotropes qui passent par les points de contact des tangentes menées du point M à K^n; T désignant l'un quelconque de ces points de contact, la polaire du point M, relativement aux deux droites isotropes se croisant au point T, est la normale menée à la courbe en ce point.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de m^n classe, la polaire d'un point quelconque M *du plan, par rapport aux droites menées respectivement par chacun des m foyers réels de la courbe perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites menées normalement à la courbe aux points de contact des diverses tangentes issues du point* M.

Cette proposition peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène les nm droites tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point* M *est le même que le centre harmonique des m foyers réels* (*).

(*) Voir à ce sujet ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société Philomathique*, février 1875).

Mais cet énoncé, plus concis, est souvent d'un usage moins facile dans les applications, et l'autre, comme je le ferai voir, s'étend sans difficulté aux cônes algébriques.

2. Un des cas particuliers les plus intéressants est celui où tous les foyers de la courbe sont à l'infini. On a alors ce théorème :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe ayant tous ses foyers à l'infini, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, la polaire du point* M *relativement à ces normales est située à l'infini.*

Ainsi, en particulier, l'hypocycloïde à trois points de rebroussement ayant tous ses foyers à l'infini, on a la proposition suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, ces normales forment un triangle dont le centre de gravité est le point* M.

3. Comme application, je déduirai de là un beau théorème dû à M. Liouville.

Soient une droite D et une courbe A de degré m, *assujettie à la seule condition de ne pas passer par les ombilics du plan.*

Considérons une droite de longueur constante R et se déplaçant de telle sorte qu'une de ses extrémités décrive la droite D, tandis que l'autre décrit la courbe A. L'enveloppe de cette droite est une courbe K ayant tous ses foyers à l'infini ; en effet, la droite ne peut passer par un ombilic que quand elle se confond avec la droite de l'infini ; dans toute autre position, la longueur interceptée

entre le point où elle rencontre D et l'un quelconque des points où elle rencontre A est évidemment nulle, puisque cette courbe ne passe pas par les ombilics.

Soit maintenant un point quelconque M pris sur la droite D; cherchons les tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K. Je remarque d'abord que D est elle-même une tangente multiple à cette courbe; je désignerai par d, d', ... ses divers points de contact.

En second lieu, si, du point M comme centre avec R comme rayon, nous décrivons un cercle rencontrant la courbe A aux points a, a', a'',..., les diverses droites Ma, Ma', Ma'', ... seront aussi tangentes à K.

Considérons en particulier une de ces tangentes, Ma par exemple; si au point M nous menons une perpendiculaire à D et au point a une normale à la courbe A, nous savons, en désignant par α le point de rencontre de ces deux droites, que la normale, menée à l'enveloppe de la droite de longueur constante aM au point où elle touche son enveloppe, passe par le point α.

4. Du théorème général que j'ai donné plus haut (n° 1), il résulte que, l'enveloppe K ayant tous ses foyers à l'infini, si l'on construit la polaire du point M relativement aux droites menées en d, d', ... perpendiculairement à D et aux droites menées normalement à K aux points où les droites Ma, Ma', ... touchent cette courbe, cette polaire est située à l'infini.

En particulier, menons par le point M une sécante perpendiculaire à D; elle rencontrera les droites issues des points d, d', ... en des points situés à l'infini et dont il n'y a pas à tenir compte, puis les normales élevées aux points de contact de Ma, Ma', Ma'', ... avec leur enveloppe au point α et en d'autres points analogues α',

α'', ... ; on aura donc la relation

$$\frac{1}{M\alpha} + \frac{1}{M\alpha'} + \frac{1}{M\alpha''} + \ldots = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que, la droite D ayant une direction arbitraire, il en est de même de la direction de la sécante qui lui est perpendiculaire, on pourra énoncer ce beau théorème, dû à M. Liouville :

Si, aux différents points où un cercle rencontre une courbe plane, on mène des normales à cette courbe, la polaire du centre du cercle relativement à ces normales est située à l'infini.

5. Je considérerai encore, comme application, un système de coniques homofocales ayant pour foyers les deux points F et F'.

Soit M un point quelconque du plan ; considérons les droites passant par les points F et F' et respectivement perpendiculaires aux directions MF et MF'. Si l'on désigne par Δ la polaire du point M relativement à ces deux droites, on voit que :

Si du point M *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, la polaire des points* M *relativement à ces deux normales est la droite fixe* Δ.

En particulier, la polaire du point M relativement aux deux normales passe par le point de rencontre de ces normales.

D'où le théorème suivant :

Si, d'un point M, *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est une droite.*

Il est clair que cette droite passe par les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point M.

6. Les deux points F et F′ étant donnés, on voit qu'à chaque point M du plan correspond une droite Δ qu'il est facile de construire.

Réciproquement, à chaque droite Δ correspondent, comme on le démontre aisément, trois points M. Si une droite Δ tourne autour d'un point fixe N, le lieu des points M correspondants est une courbe du troisième ordre passant par les ombilics, par conséquent une anallagmatique et de l'espèce particulière que j'ai étudiée sous la dénomination de *cassiniennes* (*).

Cette courbe H peut évidemment être aussi définie de la façon suivante :

Étant donné un point fixe N du plan, considérons une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points donnés F et F′, puis abaissons du point N les quatre normales à la courbe. Les tangentes en ces points forment un quadrilatère complet dont les six sommets décrivent la courbe H lorsque la conique varie.

7. Je rappellerai brièvement la définition et les propriétés principales des cassiniennes.

Une cassinienne est généralement une courbe anallagmatique du quatrième ordre dont les divers points peuvent se distribuer en couples jouissant des propriétés suivantes :

1° Le lieu des conjugués harmoniques d'un point quelconque du plan, relativement à chacun des couples de points conjugués d'une cassinienne, est un cercle.

(*) *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (*Bulletin de la Société Philomathique*, mars 1868).

En particulier, le lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués est un cercle.

2° Il existe dans le plan deux points fixes jouissant de la propriété que ces deux points fixes et deux points conjugués quelconques se trouvent sur un même cercle qu'ils partagent harmoniquement.

Dans le cas où le cercle, lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués, se réduit à une droite, le degré de la courbe s'abaisse au troisième, et l'on a une cassinienne cubique.

Si l'on joint un point quelconque d'une telle courbe à deux couples de points conjugués, on obtient deux couples de droites ayant mêmes bissectrices.

La courbe H, définie ci-dessus, est une cassinienne cubique, et l'on a la proposition suivante :

Si d'un point fixe N, *pris dans le plan, on abaisse des normales sur l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points fixes* F *et* F′, *les tangentes menées en ces points forment un quadrilatère complet. Les trois couples de sommets opposés de ce quadrilatère complet sont trois couples de points conjugués d'une même cassinienne cubique, que ces sommets décrivent quand on fait varier la conique* (*).

(*) Les tangentes, menées aux pieds des normales, roulent en même temps sur une parabole fixe.

Considérons en effet une conique C et la parabole P qui est l'enveloppe des polaires d'un point donné M par rapport aux diverses coniques qui ont les mêmes foyers que C. Les tangentes communes à C et à P touchent C en quatre points et les normales en ces points passent par le point M.

Cette propriété s'établit aisément en s'appuyant sur une importante proposition due à M. Chasles :

Les pôles d'une droite fixe, par rapport à un système de coniques homofocales, sont situés sur une même ligne droite normale à une des coniques du système.

J'ajouterai que le foyer de la parabole P est le point conjugué harmonique du point M relativement aux foyers de la conique C.

De nombreuses propriétés des normales à un système de coniques homofocales découlent immédiatement de la proposition précédente, mais je n'insisterai pas ici sur ce point, qui demande quelques développements et sur lequel je reviendrai dans un autre article; je me contente de le mentionner en passant.

II.

8. On peut facilement étendre aux cônes algébriques les propositions qui précèdent.

Le théorème fondamental que j'ai rappelé plus haut (n° 1) peut, en effet, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés deux cônes algébriques C *et* C' *ayant même sommet* S *et une droite quelconque* D *passant par ce sommet, considérons les divers plans que par la droite* D *on peut mener tangentiellement au cône* C; *soit* (I) *l'ensemble des arêtes de contact. Appelons de même* (I') *l'ensemble des arêtes de contact des plans menés par* D *tangentiellement au cône* C'; *puis imaginons que par chacune des arêtes* (I) *et chacune des arêtes* (I') *on fasse passer un plan; on aura ainsi un ensemble de plans que je désigne par* (P).

Cela posé, le plan polaire de la droite D *relativement au système de plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans tangents aux deux cônes.*

Supposons, pour fixer les idées, que C soit un cône réel (ou du moins ait une équation réelle) et que F_1, F_2, F_3, ... désignent ses droites focales réelles, que de plus C' soit un cône isotrope.

Les plans tangents communs aux deux cônes sont les plans isotropes passant par les droites F_1, F_2, F_3, ...; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une quelconque de ces droites,

F_1 par exemple, est le plan passant par F_1 et mené perpendiculairement au plan de F_1 et de D.

D'autre part, si $T_1, T_2, T_3, \ldots$ désignent les arêtes de contact des plans menés par D tangentiellement au cône C, les divers plans dont j'ai désigné ci-dessus l'ensemble par (P) sont les plans isotropes passant par les droites $T_1, T_2, T_3, \ldots$; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une de ces droites, T_1 par exemple, est le plan passant par T_1 mené perpendiculairement au plan de T_1 et de D.

Par suite, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donné un cône algébrique et une droite quelconque D *passant par le sommet de ce cône, par chacune des focales du cône faisons passer un plan perpendiculaire au plan qui contient cette focale et la droite* D; *soit* (P) *l'ensemble des plans ainsi obtenus.*

Cela posé, le plan polaire de D *relativement aux plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans menés normalement au cône par les arêtes de contact des divers plans que l'on peut par* D *mener tangentiellement à ce cône.*

9. Comme application, considérons l'un quelconque des cônes du second ordre qui ont pour focales réelles deux droites données F et F'. Soient D une droite quelconque passant par le sommet du cône et Δ le plan polaire de D relativement aux plans passant par F et F', et respectivement perpendiculaires aux plans déterminés par les droites FD et les droites F'D.

Si par D on mène deux plans tangents au cône, puis des plans normaux par les arêtes de contact, le plan polaire de D relativement à ces plans normaux est le plan Δ.

En particulier, la droite d'intersection des plans normaux est dans le plan Δ. Donc :

Étant donné un système de cônes homofocaux du second ordre et une droite fixe passant par le sommet de ce cône, si par cette droite on mène des plans tangents à l'un des cônes du système, puis des plans normaux par les arêtes de contact, la droite suivant laquelle se coupent les deux plans normaux décrit un plan lorsqu'on fait varier le cône.

10. Si par une arête d'un cône on imagine le plan normal à ce cône, puis le plan mené normalement par l'arête infiniment voisine, l'intersection de ces deux plans est l'axe d'un cône de révolution osculateur du cône donné le long de l'arête considérée. Nous l'appellerons l'*axe de courbure* du cône suivant cette arête.

Cela posé, il est clair, d'après ce qui précède, que le plan Δ déterminé comme je l'ai dit, et qui correspond à la droite D, contient les axes de courbure des deux cônes homofocaux du système donné qui se coupent suivant la droite D, et de là découle un moyen simple de construire l'axe de courbure d'un cône du second degré suivant une arête donnée, lorsque l'on connaît les focales de ce cône.

Je ferai même observer que la connaissance du plan Δ fait connaître non-seulement l'axe de courbure, mais encore l'accélération de courbure, et que des considérations de tout point semblables s'appliquent aux cônes de tous les degrés; je ne crois pas utile de m'étendre davantage à ce sujet.

11. Le théorème de M. Liouville, dont j'ai donné plus haut la démonstration (n° 3), s'étend aussi à un cône algébrique quelconque, en considérant l'intersection de ce cône avec un cône de révolution.

On obtiendrait facilement cette généralisation, au moyen des théorèmes précédents, en considérant la surface enveloppée par le plan déterminé par deux droites faisant un angle constant et dont l'un des côtés décrit un cône pendant que l'autre se meut dans un plan passant par le sommet de ce cône.

Mais le théorème auquel on parvient ainsi se complique, à cause du rôle qu'y jouent les plans cycliques du cône; il n'a ni la simplicité ni l'utilité de celui de M. Liouville, et je ne crois pas devoir le mentionner ici.

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE BIQUADRATIQUE $Ax^4 + By^4 = Cz^2$;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

L'analyse indéterminée des équations biquadratiques est peu avancée; Fermat a indiqué, le premier, le moyen de trouver, en général, une série indéfinie de solutions entières de l'équation

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = z^2,$$

lorsque l'un des coefficients extrêmes est un carré parfait, ou encore lorsque l'on connaît une première solution.

Dans le cas particulier de l'équation

$$x^4 + ax^2y^2 + by^4 = z^2,$$

on obtient, en général, une série indéfinie de solutions nouvelles, par les formules suivantes, déduites du procédé de Fermat, et données par Lebesgue :

$$X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 - (a^2 - 4b)x^4y^4.$$

L'application de ces formules devient illusoire dans certains cas, et ainsi, par exemple, pour l'équation

$$x^4 - x^2 y^2 + y^4 = z^2,$$

à laquelle on est conduit lorsque l'on cherche à déterminer quatre carrés en progression arithmétique.

Le but de cette Note est de montrer que, lorsque l'on connaît une première solution de l'équation proposée, on obtient *deux* solutions nouvelles, et non une seule; nous observerons, de plus, que les formules que nous allons démontrer permettent de résoudre *complétement* l'équation proposée, pour certaines valeurs des coefficients A, B et C, et en particulier pour *toutes* les équations biquadratiques dont on connaît actuellement la résolution complète.

Considérons d'abord l'équation

$$(1) \qquad X^4 + \lambda Y^4 = (1 + \lambda) Z^2,$$

dans laquelle nous désignerons, pour abréger, $1 + \lambda$ par ρ. On vérifie l'équation (1) en posant

$$(2) \qquad \begin{cases} X^2 = p^2 - \lambda q^2 - 2\lambda pq, \\ Y^2 = p^2 - \lambda q^2 + 2pq, \\ Z = p^2 + \lambda q^2. \end{cases}$$

La première équation du système (2) peut s'écrire

$$(p - \lambda q)^2 - X^2 = \lambda \rho q^2;$$

on peut donc poser

$$p - \lambda q \pm X = 2\lambda\rho r^2,$$
$$p - \lambda q \mp X = 2s^2,$$
$$q = 2rs,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad \begin{cases} \pm X = \lambda\rho r^2 - s^2, \\ p = \lambda\rho r^2 + s^2 + 2\lambda rs. \end{cases}$$

La seconde équation du système (2) peut s'écrire

$$(p+q)^2 - Y^2 = \rho q^2;$$

on peut donc poser

$$\begin{aligned} p+q \pm Y &= 2\rho r'^2, \\ p+q \mp Y &= 2s'^2, \\ q &= 2r's'; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad \begin{cases} \pm Y = \rho r'^2 - s'^2, \\ p = \rho r'^2 + s'^2 - 2r's'. \end{cases}$$

En égalant les valeurs de p données par les systèmes (3) et (4), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda\rho r^2 + s^2 + 2\lambda rs &= \rho r'^2 + s'^2 - 2r's', \\ rs &= r's'. \end{aligned}$$

Posons $nr' = mr$ et $ns = ms'$, nous obtenons, par l'élimination de r' et de s, l'équation quadratique en $m : n$

$$m^2(s'^2 - \rho r^2) + 2\rho rs'mn + n^2(\lambda\rho r^2 - s'^2) = 0;$$

pour que la valeur de $m : n$ soit rationnelle, on doit avoir

$$\rho^2 r^2 s'^2 + (s'^2 - \rho r^2)(s'^2 - \lambda\rho r^2) = H^2,$$

ou bien

$$(5) \qquad s'^4 + \lambda\rho^2 r^4 = H^2,$$

et, en même temps,

$$m = -\rho rs' \pm H, \quad n = s'^2 - \rho r^2.$$

L'équation (5) donne, par décomposition,

$$\begin{aligned} H \pm s'^2 &= 2\rho^2 z^4, \\ H \mp s'^2 &= 8\lambda v^4, \\ r &= 2vz; \end{aligned}$$

par suite, en prenant les signes supérieurs,

$$\rho^2 z^4 - 4\lambda v^4 = s'^2;$$

cette dernière équation donne encore

$$\rho z^2 \pm s' = 2x^4,$$
$$\rho z^2 \mp s' = 2\lambda y^4,$$
$$v = xy,$$

et, par addition,

$$x^4 + \lambda y^4 = \rho z^2;$$

on retrouve ainsi l'équation (1).

Par conséquent, d'une première solution (x, y, z) de l'équation

$$\text{(A)} \qquad x^4 + \lambda y^4 = \rho z^2,$$

on obtiendra deux solutions nouvelles par les formules

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} m &= 4\lambda x^4 y^4 + \rho^2 z^4 \pm 2\rho xyz(x^4 - \lambda y^4), \\ n &= (x^4 - \lambda y^4)^2 - 4\rho x^2 y^2 z^2, \\ X &= 4\lambda\rho n^2 x^2 y^2 z^2 - m^2(x^4 - \lambda y^4)^2, \\ Y &= 4\rho m^2 x^2 y^2 z^2 - n^2(x^4 - \lambda y^4)^2, \\ Z &= [4\lambda\rho n^2 x^2 y^2 z^2 + m^2(x^4 - \lambda y^4)^2 \\ &\qquad + 4\lambda mnxyz(x^4 - \lambda y^4)]^2 \\ &\qquad + 4\lambda m^2 n^2 x^2 y^2 z^2 (x^4 - \lambda y^4)^2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remplace, dans les formules précédentes, λ par $\frac{\mu}{\lambda}$, on obtiendra deux solutions nouvelles de l'équation

$$(6) \qquad \lambda x^4 + \mu y^4 = (\lambda + \mu) z^2,$$

à l'aide d'une première, par les formules

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} m &= 4\lambda\mu x^4 y^4 + (\lambda + \mu)^2 z^4 \pm 2(\lambda + \mu) xyz (\lambda x^4 - \mu y^4), \\ n &= (\lambda x^4 - \mu y^4)^2 - 4\lambda(\lambda + \mu) x^2 y^2 z^2, \\ X &= 4\mu(\lambda + \mu) n^2 x^2 y^2 z^2 - m^2(\lambda x^4 - \mu y^4)^2, \\ Y &= 4\lambda(\lambda + \mu) m^2 x^2 y^2 z^2 - n^2(\lambda x^4 - \mu y^4)^2, \\ Z &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

L'équation (6) est vérifiée pour $x = y = z = \pm 1$; on a donc les deux solutions nouvelles

$$(8) \quad \begin{cases} m = 4\lambda\mu + (\lambda + \mu)^2 \pm 2(\lambda^2 - \mu^2), \\ n = (\lambda - \mu)^2 - 4\lambda(\lambda + \mu), \\ X = 4\mu(\lambda + \mu)n^2 - m^2(\lambda - \mu)^2, \\ Y = 4\lambda(\lambda + \mu)m^2 - n^2(\lambda - \mu)^2, \\ Z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

ainsi l'équation

$$3x^4 - 2y^4 = z^2$$

est vérifiée par les solutions

$$x_1 = 33, \quad y_1 = 13, \quad z_1 = 1871,$$
$$x_2 = 28577, \quad y_2 = 8843, \quad z_2 = 1410140689;$$

de même, de la solution

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 11$$

de l'équation

$$3x^4 - y^4 = 2z^2$$

on déduit les deux solutions

$$x_2 = 19, \quad y_2 = 25, \quad z_2 = 13,$$
$$x_3 = 449, \quad y_3 = 167, \quad z_3 = 246121;$$

de même, les premières solutions de l'équation

$$x^4 + 3y^4 = z^2$$

sont

$$x = 1, \; 1, \; 11, \; 47, \; 7199, \; \ldots.$$
$$y = 1, \; 2, \; 3, \; 28, \; 8052, \; \ldots,$$
$$z = 2, \; 7, \; 122, \; 2593, \; 12259565, \; \ldots$$

et les premières solutions de l'équation

$$x^4 + 2y^4 = 3z^2$$

sont

$$x_1 = 23,\qquad y_1 = 11,\qquad z_1 = 321,$$
$$x_2 = 2375,\quad y_2 = 6227,\quad z_2 = 31827137.$$

Revenons maintenant à l'équation proposée

$$AX^4 + BY^4 = CZ^2;$$

en admettant une première solution (x_0, y_0, z_0), on peut l'écrire

$$Ax_0^4\left(\frac{X}{x_0}\right)^4 + By_0^4\left(\frac{Y}{y_0}\right)^4 = Cz_0^2\left(\frac{Z}{z_0}\right)^2,$$

et, si l'on pose

$$Ax_0^4 = \lambda,\quad By_0^4 = \mu,\quad Cz_0^2 = \lambda + \mu,$$

on la ramène à l'équation (6), en prenant pour variables les quotients $\frac{X}{x_0}, \frac{Y}{y_0}, \frac{Z}{z_0}$. Par une analyse plus approfondie, il est facile de montrer que les formules (7) permettent de résoudre *complétement* les équations biquadratiques suivantes :

$$\begin{array}{ll}
x^4 - 2y^4 = \pm z^2, & 4x^4 - 3y^4 = z^2,\\
x^4 + 8y^4 = z^2, & x^4 - 12y^4 = z^2,\\
4x^4 - y^4 = 3z^2, & 3x^4 - 2y^4 = z^2,\\
9x^4 - y^4 = 8z^2, & x^4 - 6y^4 = z^2,\\
27x^4 - 2y^4 = z^2, & x^4 + 216y^4 = z^2,\\
x^4 - 36y^4 = z^2, & x^4 + 24y^4 = z^2,\\
x^4 - y^4 = 24z^2, & x^4 + 2y^4 = 3z^2,\\
3x^4 - y^4 = 2z^2, & x^4 + 18y^4 = z^2,\\
x^4 + 3y^4 = z^2, & x^4 - 72y^4 = z^2.\\
x^4 - 54y^4 = z^2, &
\end{array}$$

Ces équations représentent toutes celles dont les coefficients ne contiennent que les facteurs 2 et 3, et dont la solution est possible. On peut, de même, résoudre

complétement un très-grand nombre d'autres équations de la forme proposée. Lagrange a donné, le premier, la résolution des équations

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^2 \quad \text{et} \quad x^4 + 8y^4 = z^2;$$

la résolution générale des équations qui précèdent, avec la discussion approfondie de chacun des cas particuliers, a été publiée, en 1873, dans mes *Recherches sur l'Analyse indéterminée,* à Moulins-sur-Allier.

Plus généralement, on démontre, de même, que d'une première solution (x, y, z) de l'équation

$$(9) \qquad x^4 - 2(a + 2f^2)x^2y^2 + (a^2 + b^2)y^4 = z^2,$$

on déduit deux autres solutions par les formules

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta = 4f^4 + 4af^2 - b^2, \\ &m = - bxyz \pm f[x^4 - (a^2 + b^2)y^4], \\ &n = z^2 + 4f^2x^2y^2, \\ &X = 16amnxyz(4m^2x^2y^2 - n^2z^2) \\ &\qquad + b[16m^2x^2y^2z^2 - (4m^2x^2y^2 - n^2z^2)^2], \\ &Y = 2(4m^2x^2y^2 + n^2z^2)\frac{\Delta n^2x^2y^2 + m^2z^2}{f}, \\ &Z = \Delta(4m^2x^2y^2 + n^2z^2)^4 - 4\left(\frac{\Delta n^2x^2y^2 + m^2z^2}{f}\right)^4. \end{aligned} \right.$$

Dans un grand nombre de cas, ces formules résolvent complétement l'équation (9); c'est le cas de l'équation

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

à laquelle on est conduit par les énoncés suivants :

Problème I. — *Trouver trois carrés inégaux tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, diminuée du troisième, soit un carré parfait.*

Problème II. — *Trouver un triangle rectangle, en*

nombres entiers, tel que le carré de l'hypoténuse augmenté du double de l'aire du triangle soit un carré parfait.

PROBLÈME III. — *Trouver, en nombres entiers, deux triangles ayant deux côtés égaux chacun à chacun, et dans lesquels l'angle compris est égal à 90 degrés pour le premier triangle et à 60 ou 120 degrés pour le second.*

La dernière équation, dont les plus petites solutions sont

$$\begin{array}{lll} x_0 = 2, & y_0 = 1, & z_0 = 1, \\ x_1 = 15, & y_1 = 4, & z_1 = 191, \\ x_2 = 161, & y_2 = 442, & z_2 = 364807, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{array}$$

avait été traitée incomplétement par Legendre (*Théorie des nombres*, t. II, p. 126 et 127).

SUR LES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES NOMBRES 5 ET 7;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Parmi les nombreux et intéressants résultats contenus dans les précédents Mémoires de M. l'amiral de Jonquières (*Nouvelles Annales*, juin, juillet, septembre, octobre 1878), on trouve la démonstration de cette propriété caractéristique du nombre 5, énoncée par M. Gerono (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, mai 1878, p. 219).

Le nombre 5 est le seul nombre entier décomposable en une somme de deux carrés consécutifs, et dont le carré soit aussi décomposable en une somme de deux carrés consécutifs.

D'autre part, M. Gerono (*) a montré le lien qui rattache ce théorème à l'un ou à l'autre des deux théorèmes suivants, que j'ai énoncés, sans démonstration, dans mes *Recherches sur l'Analyse indéterminée, et sur l'Arithmétique de Diophante* (Moulins, 1873) :

I. *La somme des carrés des x premiers nombres n'est jamais, excepté pour $x = 24$, égale au carré d'un nombre entier.*

II. *Aucun nombre pyramidal ne peut être égal à un carré, en exceptant les deux nombres*

$$\frac{2.3.4}{1.2.3} \quad \text{et} \quad \frac{48.49.50}{1.2.3}.$$

On peut encore rattacher cette propriété caractéristique du nombre 5 à la propriété caractéristique du nombre 7, énoncée par Fermat, et que le savant orientaliste, M. Aristide Marre, vient de retrouver dans les manuscrits de Boulliou (Bullialdus), conservés à la Bibliothèque nationale :

« M. Fermat a envoyé à M. Frénicle la démonstration par laquelle il preuve qu'il n'y a aucun nombre que le seul 7 qui, estant le double d'un quarré — 1, soit la racine d'un quarré de la mesme nature (c'est-à-dire qui soit double d'un quarré — 1).

7 est double du quarré 4, — 1, c'est-à-dire, 8 — 1, et son quarré 49 est le double du quarré 25, — 1, c'est-à-dire 50 — 1. » (*Mss. de Boulliou.*)

En effet, soit le nombre

$$u = 2x^2 - y^2, \quad \text{et} \quad y = \pm 1;$$

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVII, p. 381.

on a, en élevant au carré,

$$u^2 = (2x^2 + y^2)^2 - 2(2xy)^2;$$

en multipliant par

$$-1 = 1^2 - 2.1^2,$$

on obtient

$$(1) \qquad u^2 = 2(2x^2 + y^2 - 2xy)^2 - (2x^2 + y^2 - 4xy)^2.$$

Si l'on pose

$$2x^2 + y^2 - 2xy = r, \quad 2x^2 + y^2 - 4xy = \pm 1,$$

on a, puisque $y = \pm 1$,

$$r = (x \pm 1)^2 + x^2,$$

et aussi, d'après l'équation (1),

$$r^2 = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-1}{2}\right)^2;$$

mais u est impair, et, par conséquent, r et r^2 sont les sommes des carrés de deux nombres consécutifs. Donc $r = 5$ et $u = 7$. C. Q. F. D.

Remarque. — En cherchant à résoudre directement le problème de Fermat, on est conduit à poser les deux équations

$$y = 2x^2 - 1,$$
$$y^2 = 2z^2 - 1,$$

d'où l'on tire l'équation biquadratique

$$2x^4 - 2x^2 + 1 = z^2,$$

qu'il est facile de résoudre *complétement* en nombres rationnels, ainsi que nous le montrerons ultérieurement.

On déduit de cette résolution une preuve, plus directe et plus simple, de la proposition de Fermat.

SUR L'ÉQUATION DU SECOND ORDRE
$My y'' + N y'^2 = f(x)$

(Solution de la question 1289);

PAR M. WORMS DE ROMILLY,
Ingénieur des Mines.

Lorsque les coefficients M et N de l'équation

$$(1) \qquad My y'' + N y'^2 = f(x)$$

ont pour valeurs $M = 3$, $N = -2$, et que $f(x)$ est un polynôme du second degré, on sait ramener l'intégration de cette équation à des quadratures

$$\int \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}}, \quad \int f_1(x)\,dx,$$

Δ étant une certaine fonction des coefficients de $f(x)$ et α une constante arbitraire.

Nous nous proposons d'examiner à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients et le second membre de l'équation différentielle (1) pour que le problème puisse être ramené à l'intégration d'une expression de la forme

$$(2) \qquad \frac{du}{\sqrt{\varphi + C\psi}} = F(x)\,dx,$$

φ et ψ étant des fonctions de u, et C une constante arbitraire.

Mettons l'équation proposée sous une autre forme en y, remplaçant y par $u f^n(x)$, u étant une nouvelle fonction de x; en effectuant les calculs, on trouve

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & uu'' + \frac{N}{M} u'^2 + \frac{2n(M+N)}{M} \frac{f'}{f} uu' \\ & \quad + \frac{[Mn(n-1) + Nn] f'^2 + Mn f f''}{M f^2} u^2 - \frac{f^{1-2n}}{M} = 0. \end{aligned} \right.$$

Prenons la relation (2), nous pouvons en déduire une seconde équation en différentiant les deux membres par rapport à x; éliminons la constante arbitraire C entre ces deux équations, il vient

$$(4)\qquad uu'' - \frac{\psi' u}{2\psi} u'^2 - \frac{F'}{F} uu' - \frac{F^2}{2}\left(\varphi' - \frac{\varphi\psi'}{\psi}\right) u = 0,$$

dans laquelle φ' et ψ' représentent les dérivées de φ et de ψ par rapport à u, tandis que les autres dérivées sont prises par rapport à x. Nous devons chercher les conditions nécessaires pour que les équations (3) et (4) soient identiques.

Le coefficient de u'^2 doit être indépendant de u; il faut donc, en désignant par a le rapport $-\frac{N}{M}$, que

$$(5)\qquad \frac{\psi' u}{\psi} = 2a, \quad \psi = u^{2a} = u^{-\frac{2N}{M}}.$$

Les troisièmes termes donneront la relation

$$\frac{2n(M+N)}{M}\frac{f'}{f} = -\frac{F'}{F},$$

c'est-à-dire, en désignant par A une constante arbitraire,

$$(6)\qquad F = Af^{-\frac{2n(M+N)}{M}},$$

qui déterminera F en fonction de f.

Sur les termes suivants, nous pouvons faire plusieurs hypothèses; mais, en tout cas, il faut toujours que $\frac{f^{1-2n}}{M}$ et $\frac{F^2}{2}$ soient égaux, et, comme nous avons déjà trouvé entre ces deux quantités la relation (6), on voit qu'il faudra satisfaire aux équations de condition

$$1 - 2n = -\frac{4n(M+N)}{M}, \quad \frac{1}{M} = \frac{A^2}{2},$$

d'où l'on tire

(7) $$n = -\frac{M}{2(M+2N)}, \quad A = \sqrt{\frac{2}{M}}.$$

I. (a) Supposons que

(8) $$[M(n-1)+Nn]f'^2 + Mff'' = 0;$$

la fonction f sera de la forme

(9) $$f = (Bx+H)^{-\frac{2(M+2N)}{M+N}},$$

d'où l'on tire, pour F, la valeur $\sqrt{\frac{2}{M}}(Bx+H)^{-2}$.

Nous devrons, en outre, satisfaire à la relation

$$u\left(\varphi' - \varphi\frac{\psi'}{\psi}\right) = 1 = u\varphi' - 2a\varphi,$$

en remplaçant ψ par sa valeur (5). Cette équation s'intègre facilement et donne

$$\varphi = \gamma u^{2a} - \frac{1}{2a}.$$

Nous voyons donc que l'équation

(10) $$Myy'' + Ny'^2 = (Bx+H)^p$$

se ramène à des quadratures de la forme (2), en posant

$$y = u(Bx+H)^{\frac{M}{M+N}},$$

$$a = -\frac{N}{M}, \quad \varphi + C\psi = u^{2a}(\gamma + C) - \frac{1}{2a},$$

lorsque p satisfera à l'équation de condition que l'on trouve en égalant les exposants des seconds membres des équations (9) et (10), et qui peut se mettre sous la forme

$$M(p+2) + N(p+4) = 0.$$

(b) Si les coefficients M et N satisfont à la condi-

tion

$$M + N = 0,$$

la relation (8) donnera, pour f, une expression de la forme

$$e^{Bx+H};$$

la valeur de φ sera d'ailleurs encore donnée par la même relation que dans le cas précédent et F sera une constante. On aura donc

$$My y'' + N y'^2 = e^{Bx+H}, \quad y = u e^{\frac{Bx+H}{2}}, \quad F = \sqrt{\frac{2}{M}},$$

$$a = 1, \quad \varphi + C\psi = u^2(\gamma + C) - \frac{1}{2}, \quad M + N = 0.$$

(c) L'équation (8) est encore satisfaite dans le cas où $f(x)$ est une constante K; on a alors

$$F = \sqrt{\frac{2}{M}} K^{\frac{M+N}{M+2N}}, \quad y = u K^{-\frac{M}{2(M+2N)}},$$

et φ sera encore donné par la même relation.

II. Cherchons maintenant à identifier les derniers termes des équations (3) et (4) sans supposer nul le coefficient de u^2. Il faudra avoir

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{[Mn(n-1) + Nn^2] f'^2 + Mn f f''}{M f^2} u^2 - \frac{f^{1-2n}}{M} \\ & = -\frac{F^2}{2}\left(\varphi' - \varphi \frac{\psi'}{\psi}\right) u. \end{aligned} \right.$$

Comme f et F ne sont fonctions que de x, et que φ et ψ ne sont fonctions que de u, cette identité ne peut avoir lieu que si les trois équations

$$\frac{F^2}{2} = \frac{f^{1-2n}}{M} = -\frac{[Mn(n-1) + Nn^2] f'^2 + Mn f f''}{M \alpha f^2},$$

$$\left(\varphi' - \varphi \frac{\psi'}{\psi}\right) u = \alpha u^2 + 1,$$

ou, en tenant compte des relations (5), (6) et (7),

(12) $$u\varphi' - 2a\varphi = \alpha u^2 + 1,$$

(13) $$[Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnff'' + \alpha f^{3-2n} = 0.$$

(*d*) Prenons d'abord le cas où

$$M(n-1) + Nn = 0,$$

qui nous donne avec (7) l'équation de condition

$$3M + 5N = 0,$$

L'équation (13) se réduit, en remplaçant n, M par leurs valeurs en fonction de M, à

(14) $$\frac{25}{6}Nf'' + \alpha f^{-3} = 0,$$

qui donne

(15) $$f^2 = (Bx + D)^2 - \frac{6\alpha}{25NB^2},$$

et φ, déduit de l'équation (12), est égal à

$$\varphi = \gamma u^{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{\alpha u^2}{2(1-a)},$$

a étant égal à $\frac{3}{5}$; on peut disposer de α de manière que le second membre de la relation (15) soit la racine carrée d'un trinôme quelconque du second degré, et il faudra substituer à α cette valeur déterminée dans l'expression de $\varphi + C\psi$, qui est

$$\varphi + C\psi = u^{\frac{3}{5}}(\gamma + C) + \frac{5}{4}\alpha u^2 - \frac{5}{3}.$$

Il est possible de satisfaire à l'équation (13) en prenant pour f une puissance p d'un polynôme entier $\theta(x)$; en effectuant la substitution, on trouve

(16) $$[(M+N)n^2p^2 - Mnp]\theta'^2 + Mnp\theta\theta'' + \alpha\theta^{p+2-2np} = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que θ soit au plus du second degré; car, si l'on désigne par m le degré de θ, le premier membre est du degré $2m-2$ et le second membre a pour degré un multiple de m. L'équation $2m-2 \gtreqless m'm$ n'admet que les solutions entières

$$\begin{cases} m'=0, \\ m=1, \end{cases} \quad m=2, \quad \begin{cases} m'=1, \\ m=2. \end{cases}$$

Posons donc

$$\theta(x) = Bx^2 + Dx + E.$$

La relation (16) donne, en prenant, pour abréger,

$$(M+N)n^2p^2 - Mnp = \rho, \quad Mnp = \sigma,$$

$$(17) \quad \begin{cases} \rho(2Bx+D)^2 + 2B\sigma(Bx^2+Dx+E) \\ \qquad + \alpha(Bx^2+Dx+E)^{p+2-2np} = 0, \end{cases}$$

avec l'une des conditions

$$(18) \qquad p - 2np + 2 = 1,$$

$$(19) \qquad p - 2np + 2 = 0.$$

(e) Examinons d'abord le premier cas; en exprimant que les facteurs de chaque puissance de x dans (17) sont nuls, on trouve que l'on doit avoir

$$D^2 - 4BE = 0,$$

c'est-à-dire que θ est un carré. Prenons donc

$$\theta = (bx+d)^2;$$

l'équation (17) devient, en supprimant un facteur commun à tous les termes,

$$2b^2(2\rho+\sigma) + \alpha = 0.$$

D'autre part, l'équation (18) combinée avec (7) con-

duit à

$$(20) \qquad M(2p+1)+N(2p+2)=0.$$

Les quantités que nous avons désignées par ρ et σ sont liées par la relation

$$M^2(\rho+\sigma)=(M+N)\sigma^2,$$

et, si l'on remplace σ par sa valeur Mnp, dans laquelle n et p sont exprimables en M et N, on trouve enfin pour α

$$\alpha=\frac{b^2M^2}{4(M+N)}.$$

Quant à φ, il sera encore donné par l'équation (12), dont nous avons indiqué précédemment l'intégrale.

Nous avons donc le moyen de ramener à une quadrature l'intégration de

$$Myy''+Ny'^2=(bx+d)^{2p},$$

lorsque M, N, p sont liés par l'équation de condition (20).

(f) Passons au cas où la relation (19) est satisfaite. Elle peut se mettre sous la forme

$$M(p+1)+N(p+2)=0;$$

et l'équation (17) sera identiquement nulle si l'on a

$$2\rho+\sigma=0, \quad \rho D^2+2BE\sigma+\alpha=0,$$

qui donnent pour α la valeur

$$\alpha=\frac{M^2(D^2-4BE)}{4(M+N)}.$$

On trouvera pour φ la même valeur que précédemment.

En résumé, lorsque, dans l'équation

$$Myy''+Ny'^2=f(x),$$

M, N, $f(x)$ satisfont à l'une des conditions suivantes :

(a) $f(x) = (Bx + H)^p$, $M(p+2) + N(p+4) = 0$,

(b) $f(x) = e^{Bx+H}$, $M + N = 0$,

(c) $f(x) = \text{const.} = K$, M, N quelconques,

(d) $f(x) = \left[(Bx+D)^2 - \frac{6\alpha}{25NB^2}\right]^{\frac{1}{2}}$, $3M + 5N = 0$,

(e) $f(x) = (bx + d)^{2p}$, $M(2p+1) + N(2p+2) = 0$,

(f) $f(x) = (Bx^2 + Dx + E)^p$, $M(p+1) + N(p+2) = 0$,

l'intégration peut être faite ou du moins ramenée à des quadratures et mise sous la forme

$$F\,dx = \frac{du}{\sqrt{\varphi + Cu^{-\frac{2N}{M}}}},$$

dans laquelle C est une constante arbitraire et φ une fonction de la forme

$$\varphi = \gamma u^{-\frac{2N}{M}} + \beta u^2 + \delta.$$

Les exposants de u seront souvent fractionnaires, mais on pourra les ramener à la forme entière en prenant $u = v^m$ et attribuant à m une valeur convenable.

Remarquons que, si dans le cas (f) on prend

$$M = p + 2, \quad N = -(p+1),$$

l'équation de condition sera satisfaite. Ce cas particulier donne la solution de la question n° 1289. Si, dans l'équation proposée, on remplace y par $v^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$2Mvv'' + (M - N)v'^2 - 4vf(x) = 0.$$

Si l'on met à la place de y l'expression $v^{\frac{M}{M+N}}$, on trouve

$$\frac{M^2}{M+N} v^{\frac{M-N}{M+N}} v'' = f(x).$$

Enfin, dans le cas (f), prenons la fonction θ comme variable indépendante; nous aurons, en désignant par Δ et K deux quantités quelconques constantes,

$$(\Delta + 2\theta)\left[My\frac{d^2y}{d\theta^2} + N\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right] + My\frac{dy}{d\theta} = K\theta^p.$$

Ces diverses équations pourront être ramenées à des quadratures lorsque M, N, $f(x)$ satisferont à l'une des conditions (a), (b), (c), (d), (e), (f).

PROPRIÉTÉ DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE; CONSTRUCTION DU POINT COMMUN A DEUX NORMALES INFINIMENT VOISINES; DIRECTRICE RELATIVE A UN FOYER;

Par M. L. MALEYX.

---

1. Soient F, F_1 les deux foyers d'une ellipse dont le grand axe est $2a$ et la distance des foyers $2c$; décrivons le cercle directeur du point F comme centre avec le rayon $2a$ (*fig.* 1); considérons la sécante MM_1, que nous allons faire tourner autour du point M jusqu'à ce qu'elle devienne tangente; traçons les rayons vecteurs unissant les points M et M_1 aux foyers, et prolongeons FM, FM_1 jusqu'à ce qu'ils rencontrent le cercle directeur en N et N_1. Joignons actuellement le point S, où se coupent les droites MM_1, NN_1 prolongées, au foyer F_1, et menons par le point M_1 la droite M_1I parallèle à FN et limitée en I à la droite NN_1. Le triangle FNN_1 est isoscèle; donc il en est de même de M_1IN_1, et, par suite, $M_1I = M_1N_1$. On sait, du reste, d'après la propriété du cercle directeur, que $MN = MF_1$ et $M_1N_1 = M_1F_1$; on en déduit, en observant que les deux triangles SMN, SM_1I

sont semblables,

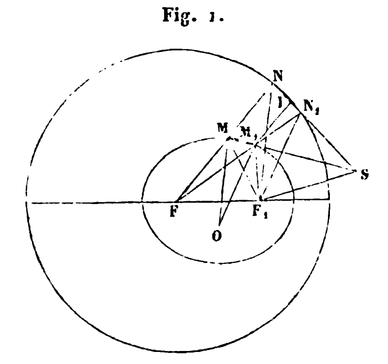
$$\frac{SM}{SM_1} = \frac{MN}{M_1I} = \frac{MN}{M_1N_1} = \frac{MF_1}{M_1F_1},$$

d'où l'on conclut que la droite F_1S est la bissectrice de l'angle extérieur du triangle MM_1F_1.

Lorsque la droite MS aura tourné autour du point M jusqu'à devenir tangente à l'ellipse, au même instant la droite SN sera devenue tangente au cercle et la bissectrice F_1S sera devenue perpendiculaire à MF_1; les limites des deux triangles MNS, MF_1S seront donc deux triangles rectangles ayant l'hypoténuse commune et le côté $MF_1 = MN$: donc ils seront égaux, leurs angles en M seront égaux, et la propriété connue est établie.

2. Les normales à l'ellipse aux points M et M_1 vont se couper en un point O dont nous allons chercher la limite quand le point M_1 se rapproche indéfiniment du

Fig. 1.



point M. Les deux droites NF_1, N_1F_1 (*fig.* 1) sont parallèles à ces deux normales MO, M_1O; le quadrilatère formé par les deux normales et les deux tangentes en M et M_1 est inscriptible dans un cercle dont le diamètre a pour limite la distance du point M au point cherché

sur la ligne MO; désignons ce diamètre variable par d. Si nous comparons le cercle dont nous venons de parler à celui qui est circonscrit au triangle F_1NN_1, les rayons de ces cercles sont proportionnels aux cordes sous-tendant des arcs de même graduation, comme MM_1, NN_1, puisque $NF_1N_1 = MOM_1$; donc, désignant par d_1 le diamètre de ce dernier cercle, on a

$$\frac{d}{d_1} = \frac{MM_1}{NN_1}.$$

D'ailleurs, si l'on considère la transversale FM_1N_1 au triangle SMN, elle fournit l'égalité

$$SN_1 \times NF \times MM_1 = SM_1 \times MF \times NN_1$$

ou

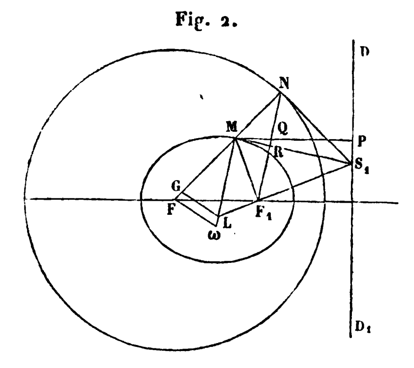
$$\frac{MM_1}{NN_1} = \frac{SM_1}{SN_1} \times \frac{MF}{2a},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d}{d_1} = \frac{SM_1}{SN_1} \times \frac{MF}{2a}.$$

Les limites des deux membres de cette égalité seront

Fig. 2.



égales; or, si nous supposons que le quadrilatère S_1NMF_1 de la *fig.* 2 soit la limite du quadrilatère $SNMF_1$ de la *fig.* 1, observant du reste que le cercle circonscrit

au triangle F_1NN_1 a pour limite le cercle passant par F_1 et tangent au cercle directeur en N, c'est-à-dire le cercle dont le centre est en M et passant par le point F_1, désignant enfin par ω la limite du point O, on aura (*fig.* 2)

$$\frac{M\omega}{2MF_1} = \frac{S_1M}{S_1N} \times \frac{MF}{2a}.$$

Si nous prolongeons S_1F_1, perpendiculaire à MF_1, jusqu'à la rencontre avec la normale en M au point L, le triangle MF_1L est semblable au triangle S_1NM ; on en déduit

$$\frac{S_1M}{S_1N} = \frac{ML}{MF_1};$$

remplaçant dans l'égalité précédente, il reste, après réduction,

$$\frac{M\omega}{ML} = \frac{MF}{a}.$$

Il suffit donc, pour obtenir le point ω, de prendre sur MF la longueur $MG = a$, d'unir le point G au point L, et de mener par le point F une parallèle à GL jusqu'à sa rencontre en ω avec la normale en M.

3. Il me paraît intéressant de placer ici la démonstration d'une proposition que j'ai reconstituée sur mes souvenirs des examens de M. Mannheim (1863).

Il s'agit de démontrer que le rapport des distances d'un point de l'ellipse à un foyer et à une droite fixe, appelée directrice, est constant et égal à $\frac{c}{a}$.

Si, dans la *fig.* 2, le point M de contact se déplace sur l'ellipse, le point S_1 décrira l'axe radical du point F_1 et du cercle directeur. Projetons le point M sur cette droite DD_1 ; le quadrilatère $PQRS_1$, dont deux angles

opposés sont droits, est inscriptible, et l'on en déduit

$$MQ \times MP = MR \times MS_1;$$

du reste, d'après la considération du triangle rectangle MF_1S_1, on a aussi

$$MR \times MS_1 = MF_1^2,$$

d'où, par comparaison avec l'égalité précédente,

$$\frac{MF_1}{MP} = \frac{MQ}{MF_1};$$

mais le rapport $\frac{MQ}{MF_1}$, égal au rapport $\frac{MQ}{MN}$, l'est aussi au rapport $\frac{FF_1}{NF} = \frac{c}{a}$, d'après la similitude des triangles MNQ, NFF_1; donc enfin

$$\frac{MF_1}{MP} = \frac{c}{a}.$$

Inutile d'ajouter que ces démonstrations s'appliquent sans restriction à l'hyperbole.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1878).

Composition mathématique (3 *heures*).

Première question (*calcul logarithmique*). — Calculer la surface S donnée par la formule

$$S = 2\pi R^2(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

dans laquelle $R = 79^m,575$ et $\varphi = 23^\circ 27' 22''$.

Nota. — La valeur de S représente la surface de la zone tempérée, à l'échelle de la carte de France.

Deuxième question. — On donne les trois côtés a, b, c d'un triangle et l'on suppose $a > b > c$. Déterminer la quantité x qu'il faut retrancher de chaque côté pour que le triangle qui aurait pour côtés $a - x$, $b - x$, $c - x$ soit rectangle. (Discussion sommaire.)

Troisième question. — On donne un triangle équilatéral ABC. Mener par le point O, milieu de BC, une sécante qui rencontre en M le côté AB et en N le prolongement du côté AC, et qui soit telle que la somme des aires des triangles OMB et ONC soit égale à l'aire du triangle ABC.

Épure ($2\frac{1}{2}$ *heures*).

On donne un plan $P\alpha P'$ dont les traces font avec la ligne de terre XY des angles $P\alpha X = 45°$ et $P'\alpha X = 36°$ (le point α étant situé à droite et à 100 millimètres du point m milieu de la ligne de terre). On donne en outre un point S situé dans le plan $P\alpha P'$, à 42 millimètres en avant du plan vertical de projection et à 45 millimètres au-dessus du plan horizontal. Ce point S est le sommet d'un tétraèdre SABC qui s'appuie par sa base ABC sur le plan horizontal de projection. L'angle solide S est trirectangle; le plan de la face SAB du tétraèdre est parallèle à la ligne de terre et la face SBC est située dans le plan $P\alpha P'$.

Cela posé, on demande :

1° De construire les projections du tétraèdre;

2° De prendre les points O et I milieux des arêtes opposées AC et SB, et de tirer la droite OI;

3° De mener par cette droite OI un plan faisant un angle de 33 degrés avec l'arête SB;

4° De construire les projections de la section faite dans le tétraèdre par ce plan.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

1re SESSION. — 2 ET 3 AOUT 1878.

ÉPREUVES ÉCRITES.

I. — *Géométrie analytique.*

On donne dans un plan une droite LL′, un point F et un point A; on considère toutes les coniques pour lesquelles le point F est un foyer et la droite LL′ la directrice correspondante. Par le point A on mène des tangentes à toutes ces coniques, et l'on demande :

1° Le lieu de la projection du point A sur toutes les cordes de contact;

2° Le lieu des points de contact. Ce dernier lieu est une conique : reconnaître quel est son genre d'après la position du point A, et, pour une position donnée de ce point, chercher à obtenir, par des constructions simples, un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer la conique.

II. — *Géométrie descriptive.*

Intersection de surfaces. Hémisphère traversé par un tore. — L'hémisphère est tangent au plan vertical et repose par sa base sur le plan horizontal; son rayon est égal à $0^m,100$, et son centre C, C′ est équidistant des grands côtés du cadre.

L'axe du tore Z, Z′ est vertical, à $0^m,170$ du plan vertical, et au milieu de la feuille; le centre du cercle méridien est à $0^m,070$ de cet axe et à $0^m,051$ du plan horizontal de projection; le rayon de ce cercle est égal à $0^m,049$.

On demande de représenter l'hémisphère supposé plein et existant seul, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement au petit côté du cadre, à $0^m,150$ du petit côté supérieur.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Hémisphère traversé par un tore.

III. — *Trigonométrie.*

On donne deux côtés a et b d'un triangle, ainsi que l'angle compris C, savoir :

$$a = 21\,753^m,788,$$
$$b = 94\,567^m,891,$$
$$C = 136°42'37'',42.$$

On demande de calculer :

1° Le troisième côté c;

2° Les angles A et B;

3° La surface du triangle.

IV. — *Physique et Chimie.*

1° Un manomètre à air libre, qui se compose d'un tube en fer A*mnp*CD trois fois recourbé et d'un tube en verre AB, plus large que le tube en fer, renferme du mercure jusqu'à la hauteur du plan horizontal AC; la partie *mnp* du tube en fer contient de l'eau.

Le rapport des sections du tube en verre et du tube en fer est égal à 5.

On demande de calculer de quelle quantité le mercure montera dans le tube en verre pour une pression de

$30^m,86$, en colonne d'eau, exercée dans la branche DC.

Densité du mercure : 13,5.

2° Formules relatives à la préparation de l'acide sulfurique de Nordhausen et de l'acide sulfurique ordinaire.

3° Quel est le volume d'acide sulfurique (SO^3, HO) qu'on peut obtenir avec 250 kilogrammes de soufre ?

Équivalents : $H = 1, O = 8, S = 16$.

Densité de l'acide sulfurique : 1,84.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

2e SESSION. — 17 ET 18 OCTOBRE 1878.

ÉPREUVES ÉCRITES.

I. — *Géométrie analytique.*

1° On donne, dans un plan, une droite P et un point F pris en dehors et à une distance a de cette droite : écrire l'équation générale des hyperboles qui ont le point F pour un de leurs foyers et la droite P pour une de leurs asymptotes.

2° Du centre de chacune de ces hyperboles on mène à la droite P une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à son intersection M avec la directrice correspondant au foyer F : trouver l'équation de la courbe lieu des points M et indiquer la position de cette courbe.

3° Former l'équation du lieu des projections du foyer F sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées.

II. — *Géométrie descriptive.*

Intersection de surfaces. Solide commun à deux cônes circulaires. — On donne, sur le plan horizontal de pro-

jection, deux cercles C, C_1, dont la corde commune ss_1 est perpendiculaire à la ligne de terre xy; le rayon de C est égal à $0^m,060$; celui de C′ à $0^m,046$. La distance des centres est égale à $0^m,033$, et la ligne des centres est à $0^m,035$ de la ligne de terre.

Ces cercles servent de bases à deux cônes dont les sommets respectifs se projettent aux points (s, s'), (s_1, s'_1). On prendra s' à $0^m,100$ au-dessus de la ligne de terre et s'_1 à $0^m,050$.

On demande : 1° de représenter par ses projections le solide commun aux deux cônes donnés, en limitant ces deux cônes, supposés pleins et opaques, d'une part aux sommets, d'autre part au plan des bases ; 2° de représenter en pointillé, jusqu'aux bords du cadre, les projections de la ligne de rencontre des nappes inférieures des surfaces coniques supposées alors prolongées.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Solide commun à deux cônes circulaires.

III. — *Trigonométrie.*

Étant donnés les trois côtés d'un triangle

$$a = 11491^m,32,$$
$$b = 14364,15,$$
$$c = 8618,49,$$

calculer les angles et la surface de ce triangle.

IV. — *Physique et Chimie.*

1° Un tube cylindrique en verre, d'une longueur de $1^m,27$, muni de deux robinets, est disposé verticalement.

Le robinet inférieur étant fermé, on introduit dans ce tube une colonne d'eau de $0^m,89$, et, au-dessus, une couche d'huile de $0^m,20$ de hauteur; la densité de l'huile est égale à 0,75. Le reste du tube est plein d'air sous la pression atmosphérique de $0^m,750$.

On ferme le robinet supérieur et l'on ouvre partiellement le robinet inférieur, de façon à laisser couler l'eau goutte à goutte jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse.

On demande de quelle hauteur s'abaissera le niveau de l'huile.

Densité du mercure: 13,6.

2° Préparation et propriétés *chimiques* de l'ammoniaque.

Formules relatives à l'action du chlore et du carbone sur le gaz ammoniac.

On calculera la densité *théorique* du gaz ammoniac.

Densité de l'azote : $\delta = 0,972$. Densité de l'hydrogène : $\delta_1 = 0,0992$.

CORRESPONDANCE.

Mon cher Brisse,

Vous m'avez donné l'idée de chercher une démonstration de la propriété de la tangente aux sections coniques en la considérant comme intersection du plan de la courbe avec le plan tangent au cône droit sur lequel elle

se trouve; l'idée a fait son trajet, et je vous offre le résultat, heureux s'il peut vous être agréable.

Je parle sur la figure connue, au moyen de laquelle Dandelin a établi la nature des sections du cône droit. Soit M un point d'une section plane d'un cône droit; par ce point je lui mène un plan tangent qui va couper l'axe focal en un point A; AM sera la tangente à la section; le plan tangent tout le long de la génératrice du cône passant en M sera aussi tangent en C à la sphère inscrite dans le cône et dont la surface renferme le foyer F de la section, et en C_1 à la deuxième sphère inscrite au cône et passant par le foyer F_1; je construis la génératrice de contact CC_1 et les droites MF, MF_1.

Les deux triangles AMF, AMC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux : AM commun, $AF = AC$ comme tangentes à une sphère issues d'un même point A, $MF = MC$ pour le même motif; donc l'angle $AMF = AMC$.

On voit de même l'égalité des triangles $AMF_1 = AMC_1$, d'où l'on déduit l'égalité des angles AMF_1, AMC_1.

Mais, dans le cas de l'ellipse, il est évident que les angles AMC, AMC_1 sont supplémentaires, et, dans le cas de l'hyperbole, qu'ils sont égaux; donc, dans le cas de l'ellipse, les rayons MF, MF_1 font avec une même partie de la tangente des angles supplémentaires, et, dans le cas de l'hyperbole, des angles égaux.

Bien à vous,

L. Maleyx.

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE (1875)

(FACULTÉ DE PARIS);

PAR M. A. TOURRETTES.



Un point matériel pesant assujetti à rester sur une sphère de rayon a est attiré proportionnellement à la distance par un point B *situé sur la verticale* O*z du centre de la sphère, à une distance* OB = *b de ce centre. On donne la valeur* μ *de l'attraction à l'unité de distance, l'intensité g de la pesanteur, la vitesse initiale k du point mobile, laquelle est supposée horizontale, et enfin la distance h de ce point au plan horizontal* xOy *qui passe par le centre de la sphère.*

On demande : 1° les limites entre lesquelles variera, pendant le mouvement, l'ordonnée z du mobile; 2° de déterminer complétement ce mouvement dans le cas particulier où l'attraction du point B *sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.*

Soient m la masse de A, 1 celle de B, N la pression sur la sphère, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x + \frac{N}{m}\frac{x}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y + \frac{N}{m}\frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu(z-b) - g + \frac{N}{m}\frac{z}{a}.$$

Multipliant la première par y et la deuxième par x, puis retranchant les résultats, on trouve

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

C'est une première équation, celle qu'on obtiendrait en appliquant le principe des aires. En multipliant respectivement par $2dx$, $2dy$, $2dz$ et ajoutant, il vient, après des réductions évidentes,

$$dv^2 = 2(\mu b - g)\,dz,$$

d'où

$$(2) \qquad v^2 = C' + 2(\mu b - g)\,z.$$

Ces deux équations avec celle de la sphère

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

suffisent pour déterminer le mouvement.

Il faut maintenant trouver la valeur des constantes en fonction des données initiales.

La vitesse k étant horizontale se projette sur xOy suivant une perpendiculaire à la projection de OA. Soit r cette projection et φ son angle avec Ox; on aura

$$r\frac{d\varphi}{dt} = k,$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = rk = C.$$

Mais à l'origine du mouvement $r = \sqrt{a^2 - h^2}$: donc

$$C = k\sqrt{a^2 - h^2}.$$

Pour déterminer C', il suffit de faire $v^2 = k^2$ et $z = h$,

$$C' = k^2 - 2(\mu b - g)\,h.$$

Par conséquent, les équations (1) et (2) deviennent

$$(4) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$(5) \qquad v^2 = k^2 + 2(\mu b - g)(z - h).$$

L'équation (3) donne

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

ou

$$(6)\qquad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt}.$$

Ajoutant (4) et (5) après les avoir élevées au carré, il vient

$$(x^2 + y^2)\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = k^2(a^2 - h^2) + z^2\frac{dz^2}{dt^2}.$$

Remplaçant $x^2 + y^2$ par $a^2 - z^2$, $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ par $k^2 + 2(\mu b - g)(z - h) - \frac{dz^2}{dt^2}$, il vient facilement

$$(7)\qquad a\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{2(\mu b - g)(z - h)(a^2 - z^2) - k^2(z^2 - h^2)}.$$

Cette équation donnera z en fonction de t; mais l'intégration n'est pas possible généralement.

Cherchons les limites de z. Pour cela, il faut égaler le radical à zéro. Nous apercevons immédiatement le facteur $z - h$; ainsi $z = h$ est une des limites; ce qui était facile à prévoir, puisque, quand $z = h$, la vitesse est horizontale et par suite $dz = 0$. En décrivant par $z - h$ le polynôme sous le radical, il vient

$$(8)\qquad 2(\mu b - g)z^2 + k^2 z - 2(\mu b - g)a^2 + k^2 h + 0.$$

Si l'on substitue $-a$ et $-\infty$, on trouve $-k^2(a^2 - h^2)$ et $+\infty$; donc il y a une racine négative qu'il faut rejeter. L'autre racine sera donc la seconde limite, et, puisque le point est sur la sphère, elle sera nécessairement plus petite que a en valeur absolue.

En résolvant (8), on trouve

$$z = \frac{-k^2 \pm \sqrt{k^4 - 8(\mu b - g)[k^2 h - 2(\mu b - g)a^2]}}{2(\mu b - g)}.$$

La deuxième limite sera $z' = \frac{-k^2 + \sqrt{}}{2(\mu b - g)}$.

L'autre racine étant nécessairement négative, il faut $\mu b - g \geq 0$.

Je vais maintenant examiner le cas particulier où l'attraction du point B sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.

Dans ce cas, $\mu b = g$ et, par suite,

$$a\frac{dz}{dt} = \pm k\sqrt{h^2 - z^2},$$

d'où

$$dt = -\frac{a\,dz}{k\sqrt{h^2 - z^2}}.$$

On prend le signe —, parce que z commence par diminuer quand t augmente; il faudra au contraire prendre le signe + quand le mobile aura atteint la deuxième limite.

L'équation ci-dessus s'intègre immédiatement et donne

$$t = \frac{a}{k}\arccos\frac{z}{h},$$

sans constante.

On en tire

(8) $$z = h\cos\frac{kt}{a}.$$

Maintenant, l'équation (4) peut s'écrire

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = k\sqrt{a^2 - h^2},$$

où $r^2 = a^2 - z^2$; par suite,

$$d\varphi = \frac{k\sqrt{a^2 - h^2}\,dt}{a^2 - h^2\cos^2\frac{kt}{a}},$$

dont l'intégrale est

$$(9) \qquad \varphi = \text{arc tang}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - h^2}} \text{tang} \frac{kt}{a}\right).$$

La constante est nulle; on trouvera le détail de l'intégration dans les *Exercices* de Frenet, n°s 348, 349.

Si l'on veut l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan xOy, il faut éliminer t entre (9) et

$$r^2 = a^2 - z^2 = a^2 - h^2 \cos^2 \frac{kt}{a},$$

ce qui donne

$$r = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + (a^2 - h^2)\sin^2\varphi}}$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$a^2x^2 + (a^2 - h^2)y^2 = a^2(a^2 - h^2).$$

C'est une ellipse ayant pour axes $\sqrt{a^2 - h^2}$ et a.

Remarque. — Dans le cas particulier que je viens d'examiner, la deuxième limite de z est $-h$; par suite, la durée de la descente du mobile est $\frac{a\pi}{k}$. Cela posé, pour représenter le mouvement ascendant, il faut se servir de

$$dt = +\frac{a}{k} \frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}}, \quad \text{d'où} \quad t = C'' + \frac{a}{k} \text{arc sin} \frac{z}{h}.$$

On pose $t = \frac{a\pi}{k}$ pour $z = -h$; il vient pour C″

$$C'' = -\frac{\pi}{2}\frac{a}{k};$$

par suite,

$$\frac{z}{h} = \text{arc sin}\left(\frac{kt}{a} + \frac{\pi}{2}\right) = \text{arc cos} \frac{kt}{a}.$$

Ainsi la formule (8) représente tout le mouvement; il en est de même de (9), qui en est une conséquence.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1876.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. TOURRETTES.

Étant donné un parallélépipède, on considère trois arêtes qui n'ont pas d'extrémités communes et les deux sommets non situés sur ces trois arêtes :

1° *Trouver l'équation du lieu d'une courbe plane du second degré, passant par ces deux points et s'appuyant sur les trois arêtes;*

2° *Chercher les droites réelles situées sur la surface;*

3° *Étudier la forme des sections faites dans la surface par des plans parallèles à l'une des faces du parallélépipède.*

Soient AB, CD, EF les trois droites; achevons le parallélépipède et prenons pour axes de coordonnées trois lignes Ox, Oy, Oz menées par le centre de la figure parallèlement à EF, CD, AB.

D'après cela, les équations des trois arêtes seront

$$\text{AB}\begin{cases} x=a, \\ y=b, \end{cases} \quad \text{CD}\begin{cases} x=-a, \\ z=c, \end{cases} \quad \text{EF}\begin{cases} z=-c, \\ y=-b. \end{cases}$$

Les coordonnées du sommet G sont

$$a, \ -b, \ -c,$$

celles du sommet H,

$$-a, \ b, \ c.$$

Cela posé, la droite GH a pour équations

$$cy+bz=0,$$
$$cx-az=0,$$

et l'équation des plans passant par cette droite sera

(1) $$cy + bz + \lambda(cx - az) = 0.$$

Cherchons les coordonnées des points d'intersection K, L, M de ce plan avec les trois arêtes.

Pour AB,

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c\frac{a\lambda + b}{a\lambda - b}, \quad \text{K}.$$

Pour CD,

$$x = -a, \quad y = -b + 2a\lambda, \quad z = c, \quad \text{L}.$$

Pour EF,

$$x = \frac{2b - a\lambda}{\lambda}, \quad y = -b, \quad z = -c, \quad \text{M}.$$

Maintenant, projetons les cinq points G, H, K, L, M sur le plan xOy. En désignant par des lettres accentuées les projections, j'aurai

$$\text{G}'(x = a, y = -b), \quad \text{H}'(x = -a, y = b),$$
$$\text{K}'(x = a, y = b), \quad \text{L}'(x = -a, y = 2a\lambda - b),$$
$$\text{M}'\left(y = -b, \quad x = \frac{2b - a\lambda}{\lambda}\right).$$

Si l'on cherche l'équation de la conique passant par les cinq points, on trouve sans peine

(2) $$(x^2 - a^2)\lambda^2 + (x - a)(y - b)\lambda + y^2 - b^2;$$

cette équation et celle du plan représentent la conique de l'espace. On obtiendra donc le lieu demandé en éliminant λ entre les deux équations, ce qui conduit à

(3) $$\left\{\begin{array}{l}(x^2 - a^2)(cy + bz)^2 + (y^2 - b^2)(az - cx)^2 \\ \quad + (x - a)(y - b)(cy + bz)(az - cx) = 0.\end{array}\right.$$

C'est une surface du quatrième degré.

Cherchons les génératrices rectilignes situées sur la surface. La méthode générale conduit à une équation du quatrième degré à coefficients compliqués. Ces coefficients, égalés à zéro, donnent cinq équations pour déterminer les paramètres des génératrices

$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q.$$

Il y aura une équation de condition à laquelle les valeurs de α, β, p, q devront satisfaire. Ce calcul étant impraticable, je considère l'équation (3) de la surface et je vois que la diagonale $cy + bz = 0$, $az - cx = 0$ est sur la surface, ce qui est évident. Nous devons aussi trouver les trois arêtes.

En effet, faisons $z = c$, il vient

$$(x^2 - a^2)(y + b)^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x = a, \\ z = c, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = c, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -b, \\ z = c. \end{cases}$$

Nous avons la droite cherchée CD, la droite AG et la droite DG qui est double.

Faisons $z = -c$, il vient

$$(y^2 - b^2)(x + a)^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y = b, \\ z = -c, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -b, \\ z = -c, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = -c, \end{cases}$$

ou bien les droites HB, EF, HE ; la dernière est double.

Pour $x = a$, on trouve

$$(y^2 - b^2)(z - c)^2 = 0;$$

d'où

$$\begin{cases} x = a, \\ y = b, \end{cases} \begin{cases} x = a, \\ y = -b, \end{cases} \begin{cases} x = a, \\ z = c, \end{cases}$$

ou bien les droites AB, FG, AG; la dernière est double.

Pour $y = b$, on trouve

$$(x^2 - a^2)(z + c)^2 = 0;$$

d'où

$$\begin{cases} y = b, \\ x = a, \end{cases} \begin{cases} y = b, \\ x = -a, \end{cases} \begin{cases} y = b, \\ z = -c, \end{cases}$$

ou bien les droites AB, CH, HB; la dernière est double.

Pour $x = -a$, on trouve

$$(y^2 - b^2)(z + c)^2 - 2(y - b)(cy + bz)(z + c) = 0$$

ou bien

$$(y - b)(z + c)[(y + b)(z + c) - 2(cy + bz)] = 0.$$

On obtient ainsi

$$\begin{cases} x = -a, \\ z = -c, \end{cases} \begin{cases} x = -a, \\ y = b, \end{cases}$$

ou bien les droites EH, CH, et la conique

$$x = -a, \quad (y + b)(z + c) - 2(cy + bz) = 0.$$

Enfin, pour $y = -b$, on trouve

$$(x - a)(z - c)[(x + a)(z - c) - 2(az - cx)] = 0,$$

ce qui donne les droites

$$\begin{cases} y = -b, \\ x = a, \end{cases} \begin{cases} y = -b, \\ z = -c, \end{cases}$$

ou les droites GF, EF et la conique

$$y = -b, \quad (x+a)(z-c) - 2(az - cx) = 0.$$

En résumé, on trouve que les arêtes DE, BF, CA opposées à celles que l'on a choisies ne sont pas sur la surface; en tout, on obtient donc dix droites distinctes, mais cela ne démontre pas qu'il n'y en ait pas d'autres. Quoi qu'il en soit, si l'on savait résoudre les équations en α, β, p, q, on tomberait sur une équation du seizième degré en α. On aurait donc au plus seize droites, en admettant que toutes les valeurs trouvées satisfissent à l'équation de condition.

Pour étudier les sections par un plan parallèle à l'une des faces du parallélépipède, je fais $z = h$ dans l'équation, h étant un paramètre variable. En développant et ordonnant, on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} c^2x^2y^2 \begin{array}{r} +cbh \\ +bc^2 \end{array}\Big| x^2y \begin{array}{r} +c^2a \\ -cah \end{array}\Big| xy^2 \begin{array}{r} +b^2h^2 \\ -b^2c^2 \\ +cb^2h \end{array}\Big| x^2 \begin{array}{r} -a^2c^2 \\ +a^2h^2 \\ -a^2ch \end{array}\Big| y^2 \\ \begin{array}{r} +abh^2 \\ -abc^2 \end{array}\Big| xy \begin{array}{r} -a^2bch \\ -a^2bh^2 \end{array}\Big| y \begin{array}{r} +cb^2ah \\ -ab^2h^2 \end{array}\Big| x - a^2b^2h^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Ordonnant par rapport à y, il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} [(c^2x^2 + ac(c-h)x - a^2(c^2 - h^2 + ch)]y^2 \\ \quad + [bc(h+c)x^2 + ab(h^2 - c^2)x - a^2bh(c+h)]y \\ \quad + b^2(h^2 - c^2 + ch)x^2 + ab^2h(c-h)x - a^2b^2h^2 = 0. \end{array}\right.$$

La courbe représentée par (5) aura des points à l'infini si les racines de

$$c^2x^2 + ac(c-h)x - a^2(c^2 - h^2 + ch) = 0$$

sont réelles; on aura deux asymptotes parallèles à l'axe

des y. La condition de réalité exige que

$$3h^2 - 2ch - 5c^2 < 0,$$

ou que h soit compris entre $\frac{5}{3}c$ et $-c$.

De même, en ordonnant par rapport à x, on trouve que le coefficient de x^2 est

$$c^2y^2 + cb(c+h)y + b^2(h^2 - c^2 + ch);$$

ce coefficient, égalé à zéro, aura des racines réelles, si

$$3h^2 + 2ch - 5c^2 < 0,$$

ce qui exige que h soit entre $-\frac{5}{3}c$ et c.

En rangeant ces valeurs limites par ordre de grandeur, on a

$$-\frac{5}{3}c, \quad -c, \quad c, \quad \frac{5}{3}c.$$

La section aura deux asymptotes, si h est entre $-\frac{5}{3}c$ et $-c$, ou entre c et $\frac{5}{3}c$; elle en aura quatre s'il est entre $-c$ et $+c$. En dehors de ces limites, il n'y aura pas d'asymptotes, et, par suite, pas de points à l'infini; la section sera une courbe fermée. D'ailleurs, il n'y a pas d'asymptotes non parallèles aux axes.

Si l'on fait $h = 0$, on trouve

$$(x^2 + ax - a^2)y^2 + (bx^2 - abx)y - b^2x^2 = 0.$$

On peut construire entièrement la courbe représentée par cette équation. On a quatre asymptotes, deux parallèles à Oy et deux à Ox. L'origine est un point isolé. Il n'y a pas de points de la courbe entre $x = \frac{3}{5}a$ et $x = -a$.

D'après cela, on construit facilement la courbe, qui a quatre branches infinies.

Note. — La même question a été résolue par MM. Barbarin et Brunot.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (*);

PAR M. B. ROBAGLIA.

On donne une circonférence, une droite fixe LL′ *qui rencontre la circonférence, et deux points fixes* A et A′ *sur la circonférence; on joint un point quelconque* M *de la courbe aux deux points* A *et* A′, *les droites* MA, M′A′ *rencontrent la ligne fixe* LL′ *en deux points variables* P *et* P′ : *démontrer qu'il existe sur la droite* LL′ *deux points fixes* I *et* I′ *tels que le produit* IP × I′P′ *demeure constant lorsque le point* M *se meut sur la circonférence; déterminer la position des deux points* I *et* I′.

Menons, par le point A, jusqu'en sa rencontre N′ avec la circonférence, la droite AN′ parallèle à la droite fixe LL′; menons de la même manière la droite A′N et tirons les droites AN et A′N′ qui coupent la droite LL′ en deux points fixes I et I′.

Les points I et I′ ainsi déterminés sont les deux points cherchés.

En effet, les deux triangles AIP et A′I′P′ sont semblables, car d'une part

$$\widehat{\text{API}} = \widehat{\text{MAN}'} = \widehat{\text{MA}'\text{N}'} = \widehat{\text{I}'\text{A}'\text{P}'},$$

d'autre part

$$\widehat{\text{AIP}} = \widehat{\text{A}'\text{I}'\text{P}'}.$$

(*) Question déjà résolue t. XV, p. 374.

On a donc

$$\frac{IP}{A'I'} = \frac{AI}{I'P'};$$

d'où

$$IP \times I'P' = AI \times A'I',$$

quantité constante.

Note. — La même question a été résolue par M. Ch. Brunot.

PHILOSOPHIE;

PAR M. LEZ.

Dans un cube dont l'arête est a, on mène une diagonale AA', puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet A :

1° *On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d;*

2° *On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan sécant se déplace.*

Faisons passer un plan par les diagonales CA, C'A' de deux faces opposées du cube; il contiendra la diagonale AA' et il sera coupé par le plan sécant suivant une perpendiculaire à AA'.

Considérons les points M, M', N où cette perpendiculaire rencontre les diagonales A'C', AC, AA'; nous aurons, à cause des triangles semblables AMN, A'M'N et AA'C,

$$AM : AA' :: AN : AC,$$
$$A'M' : AA' :: A'N : AC;$$

d'où

$$AM = d\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad A'M' = \frac{3a - d\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad M'C' = \frac{d\sqrt{3} - a}{\sqrt{2}}.$$

Examinons les variations de AM et de M'C'. Quand $M'C' = 0$, $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et $AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$, la section est un triangle équilatéral ayant $a\sqrt{2}$ pour côté et $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ pour surface. Entre $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et $d + \frac{2a}{\sqrt{3}}$, la section est un hexagone, puisque le plan sécant rencontre six arêtes; au delà de ces limites, la section est un triangle.

La surface S de cette section est égale à la projection P divisée par le cosinus (*) du plan sécant ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Or cette projection est, en général, la différence entre le carré a^2 et deux triangles rectangles isoscèles $\overline{CM}^2 + \overline{C'M'}^2$, soit

$$P = a^2 - \left(\frac{2a - d\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{d\sqrt{3} - a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}\left(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2\right);$$

par suite

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2\right).$$

Pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, la surface de l'hexagone régulier d'un côté $\frac{a}{\sqrt{2}}$ est $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; c'est le maximum des sections variables.

(*) La Trigonométrie est en dehors du programme de la classe de Philosophie, mais on voit immédiatement ici comment on suppléerait au cosinus par la considération des figures semblables.

RHÉTORIQUE ;

PAR M. LEZ.

Étant donnée une sphère, on construit, sur un grand cercle de cette sphère, comme base, un cône équivalent à la moitié du volume de la sphère, et l'on demande :

1° *De trouver le rayon du petit cercle suivant lequel la surface de ce cône coupe la surface de la sphère ;*

2° *D'évaluer le volume de la portion de cône comprise entre sa base et le plan de ce petit cercle.*

Le cône ayant pour base un cercle de rayon R aura une hauteur $h = 2R$ pour que son volume soit $\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$.

Or, en désignant par A le sommet du cône, par AB son apothème, par N le point de rencontre de AB avec la sphère, par NM le rayon du petit cercle d'intersection, par AC la tangente à la sphère, on a

$$AC = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = R\sqrt{3},$$

$$AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = R\sqrt{5}, \quad NA.AB = \overline{AC}^2 ;$$

d'où

$$AN = \frac{3R}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad BN = \frac{2R}{\sqrt{5}}.$$

Mais

$$OM = \frac{AO.BN}{BA} = \frac{4R}{5} = d \quad \text{et} \quad MN = \frac{OB.AN}{BA} = \frac{3R}{5}.$$

Le volume du tronc de cône est donc

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{4R}{5}\left(R^2 + \frac{9R^2}{25} + \frac{3R^2}{5}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{49}{125}.$$

SECONDE;

PAR M. LEZ.

1° *Construire un triangle* ABC, *connaissant les longueurs des deux côtés* AB *et* AC *et celle de la bissectrice* AD *de l'angle* A.

Représentons les côtés AC, AB par b et c, la bissectrice par p et les segments additifs BD et DC par x, y; nous pourrons écrire

$$xy = cb - p^2 = q^2 \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

Nous avons donc à chercher un rectangle équivalent à un carré q^2 et dont les côtés soient proportionnels à c et à b; c'est une construction très-simple qui fera connaître le troisième côté BC. Inutile de la reproduire, elle se trouve dans tous les Traités élémentaires.

Note. — Autre solution par M. Droz.

2° *On mène les diagonales d'un triangle* ABCD, *lesquelles se coupent en un point* O. *Étant données les aires* p^2 *et* q^2 *des deux triangles* AOB, COD, *trouver l'expression de l'aire des deux autres triangles* AOC, BOD *et celle de l'aire du trapèze* T.

Représentons les bases AB, DC du trapèze par a et b, les hauteurs des triangles AOB, DOC par h' et h, nous aurons

$$\text{triangle BOD} = S = \text{DBC} - \text{DOC} = \frac{bh'}{2}$$

et

$$\text{triangle AOC} = S' = \text{ACB} - \text{AOB} = \frac{ah}{2}.$$

De même

$$\text{AOB} = p^2 = \frac{ah'}{2} \quad \text{et} \quad \text{DOC} = q^2 = \frac{bh}{2};$$

par suite

$$\frac{2\text{S}}{b} = h' = \frac{2p^2}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{S}}{p^2} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{2\text{S}'}{a} = h = \frac{2q^2}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{S}'}{q^2} = \frac{a}{b}.$$

Mais ces triangles BOD et AOC sont équivalents; donc

$$2\text{S} = bh' = ah \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{h'}{h}.$$

De plus

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{ah'}{bh} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{b};$$

alors

$$\text{S} = \frac{p^2 b}{a} pq \quad \text{et} \quad \text{T} = (p+q)^2.$$

Note. — Autre solution par M. Robaglia.

TROISIÈME;

PAR M. LEZ.

Construire un triangle ABC, *connaissant la base* AB, *donnée de position, l'angle au sommet* C *et un point* P *pris sur la bissectrice de l'angle formé en* C *par le côté* AC *et le prolongement du côté* BC.

Sur le côté AB décrivons un segment capable de l'angle C, joignons le point P au milieu M de l'arc AB. Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle C se coupant à angle droit, il suffit de décrire un cercle sur PM comme diamètre, il rencontrera le segment au sommet cherché C.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL;

PAR M. ROBAGLIA.

Étant donnés deux rectangles égaux superposés ABCD, A′B′C′D′:

1° *Déterminer géométriquement un point* O *tel, que si, laissant fixe le rectangle* ABCD, *on fait tourner autour de ce point le rectangle* A′B′ C′D′ *jusqu'à ce que le grand côté* A′B′, *qui coïncidait primitivement avec* AB, *vienne se placer perpendiculairement à* AB, *le milieu de* A′B′ *se trouve au point de concours des diagonales du rectangle* ABCD.

2° *Calculer, en supposant les longueurs des côtés* AB *et* AD *égales à* $2a$ *et à* $2b$, *les distances du point* O *aux deux côtés* AB *et* AD.

1° Joignons respectivement les points A′ et B′, extrémités de la droite A′B′ dans sa seconde position, aux points A et B. Sur les droites AA′ et BB′, en leurs milieux, élevons des perpendiculaires : le point O où ces deux perpendiculaires se coupent est le point cherché.

Remarquons, en effet, que AB égale A′B′; AO égale A′O comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire et de même OB égale OB′; que par suite les angles AOB et A′OB′ sont égaux. En retranchant de ces deux angles la partie commune A′OB, on en conclut que les angles AOA′ et BOB′ sont égaux.

Si maintenant nous faisons tourner le rectangle A′B′C′D′ autour du point O, de l'angle BOB′, le rayon OB viendra sur OB′ et le point B au point B′; de même le rayon OA, tournant de l'angle AOA′ = BOB′, viendra sur OA′ et le point A au point A′. Ainsi, le rectangle

$A'B'C'D'$, après avoir tourné autour du point O, déterminé comme nous l'avons dit, de l'angle BOB', prendra la position marquée dans l'énoncé du problème.

2° Soient OE et OE' les perpendiculaires abaissées du point O sur AB et AD, H le point où la perpendiculaire OE' rencontre $A'B'$, M et N les milieux des droites AB et $A'B'$.

De l'égalité des deux triangles BOA et $B'O'A'$, on conclut que

$$OE = OH, \quad OE' = a - OE, \quad OM = ON.$$

Le triangle MON étant isoscèle et OH étant égal à OE, on en conclut que

$$OE = \frac{b}{2}, \quad OE' = a - \frac{b}{2}.$$

Les distances du point O aux deux autres côtés du rectangle ABCD sont

$$\frac{3b}{2} \quad \text{et} \quad a + \frac{b}{2}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une circonférence O *située dans un plan vertical, et, sur la verticale du centre* O, *au-dessus de ce point et en dehors du cercle, on prend un point* C *que l'on considère comme une poulie infiniment petite.*

Sur une poulie passe un fil ACB; *à l'extrémité* B *est suspendu un poids* Q, *à l'autre extrémité* A *est fixé un*

anneau qui supporte un poids P et qui est assujetti à glisser sans frottement le long de la circonférence O.

Déterminer les positions d'équilibre du système et indiquer pour chacune d'elles si l'équilibre est stable ou instable. (On néglige le poids du fil et celui de l'anneau, ainsi que les dimensions de la poulie et celles de l'anneau.)

Posons

$$OA = r, \quad OC = h, \quad \widehat{AOC} = \alpha, \quad \widehat{ACO} = \beta.$$

Les composantes tangentielles du poids P et de la tension Q du fil AC sont P $\sin\alpha$ et Q $\sin(\alpha+\beta)$, quel que soit l'angle α. La condition d'équilibre est donc

$$(1) \qquad P\sin\alpha = Q\sin(\alpha+\beta).$$

Le triangle OAC donne

$$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{h}$$

ou

$$(2) \qquad h\sin\beta = r\sin(\alpha+\beta).$$

En divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{P\sin\alpha}{h\sin\beta} = \frac{Q}{r}, \quad \text{d'où} \quad \sin\beta = \frac{Pr}{Qh}\sin\alpha.$$

D'autre part, l'équation (2) donne

$$\tang\beta = \frac{r\sin\alpha}{h - r\cos\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \sin\beta = \frac{r\sin\alpha}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2rh\cos\alpha}}.$$

En égalant ces deux valeurs de $\sin\beta$, on a

$$(3) \qquad r\sin\alpha\left(P\sqrt{h^2+r^2-2rh\cos\alpha} - Qh\right) = 0.$$

La solution $\sin\alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, donne

comme positions d'équilibre les deux extrémités D et D' du diamètre vertical.

En égalant à zéro le facteur entre parenthèses, on a

$$\cos\alpha = \frac{P^2(h^2 + r^2) - Q^2h^2}{2P^2rh},$$

ce qui donne une troisième position d'équilibre pourvu que le second membre soit compris entre + 1 et — 1, ou que l'on ait

$$\frac{Qh}{h+r} < P < \frac{Qh}{h-r}.$$

L'angle α sera d'ailleurs aigu ou obtus suivant que P sera plus grand ou plus petit que $\frac{Qh}{\sqrt{h^2+r^2}}$.

Au point D, $\alpha = 0$, l'équilibre sera stable ou instable suivant qu'on aura, pour de très-petites valeurs de α,

$$Q\sin(\alpha + \beta) - P\sin\alpha \gtrless 0,$$

ou, en ne négligeant que des quantités infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve,

$$Q(\alpha + \beta) - P\alpha \gtrless 0, \quad Q\beta = \frac{Pr}{h}\alpha.$$

La condition de stabilité de l'équilibre est donc

$$\left[Q - \frac{P(h-r)}{h}\right]\alpha > 0, \quad \text{ou} \quad P < \frac{Qh}{h-r}.$$

Au point D', $\alpha = \pi$, l'équilibre sera stable ou instable suivant que, pour de très-petites valeurs de $\alpha' = \pi - \alpha$, on aura

$$P\sin\alpha - Q\sin(\alpha + \beta) \gtrless 0$$

ou

$$P\alpha' - Q(\alpha' - \beta) \gtrless 0, \quad \beta = \frac{Pr}{h}\alpha'.$$

La condition de stabilité est donc

$$P\frac{(h+r)}{h} - Q > o \quad \text{ou} \quad P > \frac{Qh}{h+r}.$$

Si donc P est compris entre $\frac{Qh}{h-r}$ et $\frac{Qh}{h+r}$, l'équilibre sera stable aux points D et D', et il y aura entre ces deux points une troisième position d'équilibre, nécessairement instable. En effet, si l'on écarte l'anneau de l'un des points D, D', il tend à y revenir jusqu'à ce que l'on atteigne la position d'équilibre intermédiaire : donc, dans cette position, l'équilibre est instable.

Si l'on a $P \geq \frac{Qh}{h-r}$, l'équilibre est instable en D et stable en D'.

Si $P \leq \frac{Qh}{h+r}$, l'équilibre est stable en D, instable en D'.

Dans ces deux cas, il n'y a pas d'autre position d'équilibre.

Lorsque P tend vers l'une des limites $\frac{Qh}{h-r}$, $\frac{Qh}{h+r}$, la position d'équilibre A tend vers la limite D ou D', où l'équilibre devient alors instable.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey et Tourrettes.

SOLUTION DE LA QUESTION DE LICENCE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

Par M. A. TOURRETTES.

Un point matériel M *se meut sur un cercle horizontal qui tourne d'un mouvement uniforme autour*

d'un axe vertical passant par un point O *de la circonférence :*

1° *Etudier le mouvement relatif du mobile* M *sur le cercle;*

2° *Déduire de là les lois du mouvement absolu du mobile dans le plan fixe;*

3° *Examiner en particulier le cas où la vitesse du mobile sur le cercle devient nulle, quand le mobile arrive au point* O; *dans ce dernier cas, calculer et discuter la valeur de la pression exercée par le mobile sur le cercle.*

On fait abstraction de la pesanteur et du frottement.

Soient a le rayon du cercle (*), Ox la position initiale du diamètre OCA, ω la vitesse angulaire de rotation, θ l'angle du rayon CM à l'époque t, alors ωt sera l'angle du diamètre OA avec Ox.

1° Cela posé, le mouvement du point M est uniquement dû aux forces qui naissent de la rotation ω. Ces forces sont au nombre de deux : la force d'entraînement prise en sens contraire, qui n'est autre que la force centrifuge ω^2.OM ou $2a\omega^2\cos\frac{\theta}{2}$; la force centrifuge composée, qui a pour expression $2\omega v_r$, et dont la direction est MO.

La première force, projetée sur la tangente au point M, donne

$$2a\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad a\omega^2\sin\theta;$$

quant à la seconde, elle n'intervient pas dans le mouvement.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

L'équation du mouvement relatif sera donc

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta,$$

en remarquant que la force tangentielle tend à diminuer l'angle θ.

Cette équation n'est autre que celle du pendule simple, où l'on remplacerait $\frac{g}{l}$ par ω^2. Je multiplie les deux membre de (1) par $2d\theta$, et j'ai par une première intégration

$$(2) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = c + 2\omega^2 \cos\theta,$$

d'où

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{c + 2\omega^2 \cos\theta}}.$$

On aura donc θ en fonction de t par une quadrature, qui ne peut s'effectuer en quantités finies généralement.

2° Il est facile, quand θ est connu, d'avoir la position du mobile dans le mouvement absolu. Soient r la valeur de OM, et φ son angle avec Ox, on aura immédiatement

$$\varphi = \omega t - \frac{\theta}{2},$$

$$r = 2a \cos\frac{\theta}{2}.$$

3° Passons au cas particulier où la vitesse du mobile, sur le cercle, devient nulle quand le mobile arrive au point O.

Dans ce cas, l'équation (2) donne

$$c = 2\omega^2,$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2\omega^2(1 + \cos\theta) = 4\omega^2 \cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega \cos\frac{\theta}{2}.$$

On peut écrire successivement

$$\omega dt = \frac{\cos\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d\sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}};$$

par suite,

$$\omega t + c' = \frac{1}{2}\,\text{lognép}\,\frac{1 + \sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin\frac{\theta}{2}}.$$

Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement le point M est à l'extrémité du diamètre OA, il faut que $c' = 0$. Donc

$$2\omega t = \text{lognép}\,\frac{1 + \sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin\frac{\theta}{2}}.$$

Cette équation donne le mouvement relatif; on en tire

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}};$$

par suite,

$$r = 2a\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4a}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}},$$

$$\varphi = \omega t - \arccos\frac{2}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}.$$

Ce sont les équations de la trajectoire dans le mouvement absolu. En prenant les dérivées de r et de φ par rapport à t, on trouve que r diminue et que φ augmente avec t; on en conclut que la trajectoire absolue est une spirale qui s'enroule autour du point O.

Les résultats que je viens d'obtenir me permettront de calculer aisément la pression, qui n'est autre que la résultante de la composante normale des forces centrifuges et de la force centrifuge composée.

La composante normale de la force centrifuge provenant de la rotation est $2a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$; il y a, en outre, la force centrifuge provenant du mouvement relatif de M : $a\frac{d\theta^2}{dt^2} = 4a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$. Donc, en somme, j'ai pour les forces centrifuges $6a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Il faut enfin tenir compte de la force centrifuge composée $2\omega v_r = 2\omega . 2\omega a \cos\frac{\theta}{2} = 4\omega^2 a \cos\frac{\theta}{2}$, dont la direction est de M vers C.

Par conséquent, la pression

$$R = 6a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2} - 4a\omega^2\cos\frac{\theta}{2} = 2a\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\left(3\cos\frac{\theta}{2} - 2\right).$$

Pour $\theta = 0$, $R = 2a\omega^2$, c'est la force centrifuge due à la rotation ω; prenons la dérivée de R,

$$\frac{dR}{d\theta} = 2a\omega^2\sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 3\cos\frac{\theta}{2}\right);$$

nous voyons que, pour $\theta = 0$, $\frac{dR}{d\theta} = 0$, et que la valeur de $R = 2a\omega^2$ est un maximum; θ augmentant, R diminue et s'annule pour

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\frac{1}{3};$$

puis R devient négatif et s'annule de nouveau pour $\theta = \pi$. Quand $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, R est un minimum; il est maximum pour $\theta = \pi$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey et Escary.

QUESTIONS DE LICENCE (1877)

(FACULTÉ DE PARIS);

PAR M. H. COURBE.

1. *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation*

$$(1) \qquad \rho^2 = a^2 \log \frac{\tang \omega}{c},$$

dans laquelle c est un paramètre variable.

En employant les coordonnées rectangulaires

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad \frac{y}{x} = \tang \omega,$$

on met l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - a^2 \log \frac{y}{cx} = 0,$$

ou

$$f(x, y) = 0.$$

Cette équation fournit la relation

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x} \frac{2x^2 + a^2}{2y^2 - a^2},$$

qui, portée dans l'équation de condition

$$1 - \frac{f'_x}{f'_y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

donne

$$(3) \qquad 1 - \frac{y}{x} \frac{2x^2 + a^2}{2y^2 - a^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

le paramètre c a disparu par la différentiation, de sorte que l'équation (3) est l'équation différentielle des trajectoires demandées.

Pour l'intégrer, on sépare les variables et l'on obtient l'équation

$$\frac{x\,dx}{x^2+\frac{a^2}{2}} = \frac{y\,dy}{y^2-\frac{a^2}{2}},$$

dont l'intégrale est

$$2x^2 + a^2 = b^2(2y^2 - a^2),$$

ou

$$(4) \qquad 2x^2 - 2b^2y^2 + a^2(1+b^2) = 0,$$

b^2 désignant une constante arbitraire, qui a dû être prise positive.

L'équation (4) représente les trajectoires orthogonales des courbes (1); ce sont des hyperboles ayant leur centre à l'origine, leurs foyers sur l'axe des y à une distance $\pm\frac{a(1+b^2)}{b\sqrt{2}}$ de l'origine, et dont les asymptotes sont représentées par l'équation double

$$y = \pm bx.$$

2. *L'angle* α *étant supposé compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$, *soit*

$$(1) \qquad \rho^2 = a^2 \log \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha}$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires; on demande si l'aire du secteur limité par cette courbe et par les rayons vecteurs correspondant à $\omega = \alpha$ *et* $\omega = \frac{\pi}{2}$ *a une valeur finie ou infinie.*

Le rayon vecteur ρ s'annulant pour $\omega = \alpha$ et devenant infini pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, le secteur dont on veut étudier l'aire est illimité et compris entre la courbe passant à

l'origine et tangente à la droite qui fait un angle α avec l'axe polaire, et une perpendiculaire menée à cet axe par l'origine, et qui est une asymptote de la courbe.

Il s'agit de savoir si

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha} d\omega$$

a une valeur finie ou infinie.

Pour cela, comme

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha} d\omega = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega d\omega - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \alpha \, d\omega,$$

il suffit de chercher si

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega d\omega$$

a une valeur finie ou infinie.

Je remarque que

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega d\omega = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega d\omega - \int_{0}^{\alpha} \log \operatorname{tang} \omega \, d\omega.$$

Or, α étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, aucun des éléments de $\int_{0}^{\alpha} \log \operatorname{tang} \omega d\omega$ ne devient infini ; cette intégrale a une valeur finie, et il reste à considérer

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega d\omega.$$

Mais

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega d\omega = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \omega d\omega - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \omega d\omega,$$

et, comme on a évidemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \omega \, d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \omega \, d\omega,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega \, d\omega$ est nulle; par conséquent, l'intégrale proposée a une valeur finie qui est

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha}\, d\omega$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \log \operatorname{tang}\alpha + \int_0^\alpha \log \operatorname{tang}\omega \, d\omega\right].$$

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. H. LAURENT.

[suite (*).]

PREMIÈRES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. — FORMULES FONDAMENTALES.

Dans les applications du Calcul intégral, les fonctions trigonométriques se présentent sous leurs formes inverses quand on ne les introduit pas directement dans le calcul sous leur forme normale. Il faudra donc nous attendre à rencontrer par analogie les intégrales elliptiques avant les fonctions directes : aussi allons-nous revenir un instant sur ces fonctions inverses.

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 537. Le lecteur est prié de supprimer, dans ce dernier article, le théorème de Poncelet, qu'une erreur de mise en pages y a fait intercaler et qu'on retrouve plus loin dans ce Chapitre.

Nous avons posé

$$(1) \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = F(\varphi) = F(k, \varphi)$$

et de là nous tirons

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} F, \quad \varphi = \operatorname{am} F,$$

Nous poserons encore, avec Legendre,

$$(2) \qquad \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = E(\varphi) = E(\varphi, k).$$

La fonction (1) est l'intégrale de première espèce, l'intégrale $E(\varphi)$ est l'intégrale de seconde espèce de Legendre : elle diffère de celle de Jacobi. On a

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - k^2 \int_0^\varphi d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

La seconde intégrale est celle de Jacobi, qui se réduit à $Z(x) = k^2 \int_0^x \operatorname{sn}^2 x\, dx$ quand on fait $\sin\varphi = \sin \operatorname{am} x$; nous la désignerons par $J(\varphi)$, de sorte que $J(\operatorname{am} x) = Z(x)$; nous aurons alors

$$(3) \qquad E(\varphi) = F(\varphi) - J(\varphi), \quad J(\varphi) = F(\varphi) - E(\varphi).$$

La fonction elliptique de seconde espèce $E(\varphi)$ représente un arc d'ellipse dont les coordonnées seraient

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi;$$

φ est alors le complément de l'anomalie excentrique, et l'on trouve

$$ds = a\, d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2\varphi},$$

et, par suite, en prenant a pour unité, et en faisant

$1 - b^2 = k^2$,

$$ds = d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi};$$

on a donc

$$s = E(\varphi, \sqrt{1 - b^2}),$$

ce qu'il fallait prouver.

Si, pour évaluer l'arc d'hyperbole, on posait

$$x = a\frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2}, \quad y = b\frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2},$$

on trouverait

$$ds = a\,d\psi \sqrt{1 + \frac{a^2 + b^2}{4a^2}(e^\psi - e^{-\psi})^2}.$$

Par une suite de transformations, on finirait par ramener cette expression aux fonctions elliptiques, mais il est plus simple de suivre une autre voie pour évaluer l'arc d'hyperbole; nous prendrons l'équation de cette courbe sous la forme

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

ou

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Si l'on forme l'élément d'arc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve

$$ds = \frac{\left(a^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2\right)dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)\left(a^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2\right)}},$$

ce que l'on peut écrire, en posant d'abord $\frac{x}{a} = x'$,

$$ds = \frac{2\left(1 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}x'^2\right)a\,dx'}{\sqrt{(1 + x'^2)\left(1 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}x'^2\right)}};$$

après quoi, conformément aux règles que nous avons données pour la réduction des fonctions elliptiques, nous poserons

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\,x' = \frac{x''}{\sqrt{1-x''^2}};$$

nous aurons alors

$$ds = \frac{dx''}{\sqrt{(1-x''^2)\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}x''\right)}}\;\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2(1-x''^2)}}.$$

Posons

$$x'' = \sin\varphi,\quad \frac{b^2}{a^2+b^2} = k^2,$$

et nous aurons

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\;\frac{a\sqrt{1-k^2}}{\cos^2\varphi}.$$

Nous poserons

(4) $$\Upsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\sqrt{1-k^2}}{\cos^2\varphi}\;\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

l'arc d'hyperbole sera donc représenté par $a\Upsilon(\varphi)$ et simplement par $\Upsilon(\varphi)$, quand a sera l'unité. La suite des transformations que nous venons d'effectuer revient à faire

$$\sqrt{\frac{1}{1-k^2}}\,x' = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x = ax' = a\sqrt{1-k^2}\operatorname{tang}\varphi,$$

$$y = \frac{ak}{\sqrt{1-k^2}}\;\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

COMPARAISON DES ARCS D'ELLIPSE ET D'HYPERBOLE.

Nous continuerons dans ce paragraphe le numérotage de formules employé dans le précédent et nous prou-

verons d'abord que la fonction Υ se ramène à E et à F (il est bon de remarquer que Υ est un cas particulier de l'intégrale de troisième espèce); on a

$$\Upsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on observe alors que

$$d\tang\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = d\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi\sqrt{}} - \frac{k^2\tang^2\varphi}{\sqrt{}} - \frac{k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{}}\right)$$
$$= d\varphi\left[\frac{(1-k^2)}{\cos^2\varphi\sqrt{}} + \frac{k^2}{\sqrt{}} - k^2\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{}}\right],$$

on aura, en intégrant et en ayant égard à (1), (2), (3),

$$(5)\qquad \tang\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Upsilon(\varphi) + (k^2-1)\,F(\varphi) - E(\varphi):$$

la fonction $\Upsilon(\varphi)$ se ramène donc à $F(\varphi)$ et à $E(\varphi)$.

Mais on peut aller plus loin, et exprimer $\Upsilon(\varphi)$ au moyen de deux fonctions E d'amplitude et de modules différents. Ce théorème sera démontré si l'on prouve que $F(\varphi)$ peut être évalué en fonction de deux fonctions E; ce théorème célèbre, en vertu duquel un arc d'hyperbole peut être mesuré par deux arcs d'ellipse, est dû à Landen et porte son nom.

Or la transformation de Landen permet d'écrire

$$(6)\qquad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}} = \frac{1+k}{2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et la relation qui en résulte pour les angles φ et φ_1 peut s'écrire

$$(7)\qquad \sin^2\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right);$$

d'ailleurs,

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}.$$

Si nous multiplions membre à membre (6) et (7), nous aurons

$$\frac{1}{k_1^2}\mathrm{J}(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{4k}\mathrm{J}(k, \varphi) + \frac{1+k}{4}\mathrm{F}(k, \varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi,$$

ou, en vertu de (3),

$$\frac{1}{k_1^2}[\mathrm{F}(k_1, \varphi_1) - \mathrm{E}(k_1, \varphi_1)]$$
$$= \frac{1+k}{4k}[\mathrm{F}(k,\varphi) - \mathrm{E}(k, \varphi)] + \frac{1+k}{4}\mathrm{F}(k, \varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi;$$

mais la formule (6) donne

$$\mathrm{F}(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2}\mathrm{F}(k,\varphi);$$

en remplaçant alors $\mathrm{F}(k_1, \varphi_1)$ par cette valeur, on a

$$\mathrm{F}(k,\varphi) = \frac{2}{\sqrt{1-k_2}}[\mathrm{E}(k,\varphi) - (1+k)\mathrm{E}(k_1, \varphi_1) + k\sin\varphi],$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

SUR L'ADDITION DES INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Les questions traitées ci-dessus, quoique se rattachant à la théorie des fonctions elliptiques, pourraient se traiter sans avoir aucune notion de ces fonctions; il était bon de les signaler, parce qu'elles ont fait naître des recherches ultérieures et ont été le point de départ de la théorie: on sait qu'Euler avait deviné l'intégrale algébrique de l'équation d'où dépend le théorème de l'addition des fonctions $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$. Il convient de faire connaître ici une méthode géométrique due à Lagrange, qui a dû contribuer pour sa part à faciliter les premières recherches.

Soient φ, ψ, μ les côtés d'un triangle sphérique et C l'angle opposé à μ; posons

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 \mu} = k^2, \quad \cos C = \pm\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu}.$$

Supposons actuellement que l'on fasse varier φ et ψ en laissant μ constant, ainsi que l'angle C, nous aurons

$$(1) \qquad \cos\mu = \cos\varphi\cos\psi \pm \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu};$$

mais, le côté μ variant seulement de position, ses extrémités décrivent sur les côtés φ et ψ des éléments $d\varphi$ et $d\psi$ dont les projections sur μ doivent être égales. En effet, soient AA′ et BB′ les positions voisines du côté μ, si du point O où se croisent ces positions, comme pôle, on décrit les arcs BC, A′C, comme OB = OC, A′O = C′O, il faut bien que AC = B′C′. Or

$$AC = d\varphi \cos(\varphi, \mu), \quad B'C' = d\psi \cos(\psi, \mu):$$

donc

$$d\varphi \cos(\varphi, \mu) = d\psi \cos(\psi, \mu),$$

ou

$$d\varphi\sqrt{1 - \sin^2(\varphi, \mu)} = d\psi\sqrt{1 - \sin^2(\psi, \mu)};$$

mais

$$\frac{\sin(\varphi, \mu)}{\sin\psi} = \frac{\sin C}{\sin\mu} = k:$$

donc

$$\sin(\varphi, \mu) = k\sin\psi.$$

La formule précédente donne alors

$$(2) \qquad d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} = \pm\, d\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

La formule (1) est donc l'intégrale de celle-ci, μ y est constant; si l'on fait alors $\Psi = 0$, on a $\mu = \varphi$. Si l'on écrit (2) ainsi

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi} = 0,$$

ou

$$(4) \qquad F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu),$$

$F(\mu)$ désignant la constante, μ se réduira à φ pour $\psi = 0$, et (1) sera équivalente à la relation transcendante (4); la formule (1) devant avoir lieu pour $\mu = 0$ et $\varphi = -\psi$, il faudra alors prendre le signe — devant le radical. Que l'on fasse $\varphi = \operatorname{am} a$, $\psi = \operatorname{am} b$, $\mu = \operatorname{am}(a + b)$, on aura alors

$$\operatorname{cn}(a + b) = \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn}(a + b).$$

Cette équation, combinée avec les suivantes :

$$\operatorname{cn} a = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a},$$
$$\operatorname{dn} a = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a},$$

fera connaître $\operatorname{cn}(a + b)$, $\operatorname{dn}(a + b)$ et $\operatorname{sn}(a + b)$: on retrouve ainsi les formules fondamentales de l'addition des fonctions elliptiques. On peut retrouver ces formules en cherchant les lignes de courbure des surfaces du second ordre : c'est ce que nous allons voir.

LIGNES DE COURBURE DE L'HYPERBOLOÏDE.

On peut considérer les lignes de courbure de l'hyperboloïde gauche comme les lignes bissectrices des génératrices. Or les génératrices ont pour équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\psi - \cos\psi,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\psi + \sin\psi.$$

Les paramètres φ et ψ servent à caractériser une génératrice; en les prenant pour variables, les équations différentielles des lignes de courbure prennent la forme

$$\Phi\, d\varphi = \pm \Psi\, d\psi,$$

équations dans lesquelles on a

$$\Phi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$\Psi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2;$$

en effectuant les calculs, on a

$$\sqrt{1 - \sin^2\psi}\, d\varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, d\psi,$$

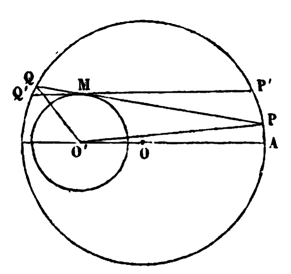
ou bien

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} \pm \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\psi}} = 0,$$

d'où l'on conclut l'équation des lignes de courbure sous forme finie. Il est assez curieux que l'on puisse ramener ainsi aux fonctions elliptiques la solution d'un problème résolu par une tout autre voie.

THÉORÈME DE PONCELET.

Voici encore une interprétation très-curieuse du théorème qui vient de nous occuper : considérons deux cercles intérieurs l'un à l'autre; soient R et r leurs



rayons et PQ, P′Q′ deux tangentes infiniment voisines menées au cercle de rayon r; soit OO′ la ligne des centres

$$\text{arc AP} = 2\varphi R, \quad \text{arc AQ} = 2\psi R.$$

On aura

$$\frac{\mathrm{PP}'}{\mathrm{QQ}'} = \frac{d\varphi}{d\psi};$$

mais les triangles semblables P P′M, QQ′M donnent

$$\frac{\mathrm{PP}'}{\mathrm{QQ}'} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}'} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}};$$

ainsi

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}};$$

or, à la limite, le point M vient sur le cercle r au point de contact de PQ, et l'on a

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{O'P}}^2 - r^2 = \mathrm{R}^2 + a^? - r^2 + 2\mathrm{R}a\cos 2\varphi,$$

$$\overline{\mathrm{MQ}}^2 = \overline{\mathrm{O'Q}}^2 - r^2 = \mathrm{R}^2 + a^2 - r^2 + 2\mathrm{R}a\cos 2\psi:$$

on a donc

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}^2 + a_1 - r^2 + 2a\mathrm{R}\cos 2\varphi}{\mathrm{R}^2 + a^2 - r^2 + 2a\mathrm{R}\cos 2\psi}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\mathrm{R}+a)^2 - r^2 - 2a\mathrm{R}\sin^2\varphi}{(\mathrm{R}+a)^2 - r^2 - 2a\mathrm{R}\sin^2\psi}}.$$

Si l'on fait

$$k^2 = \frac{2a\mathrm{R}}{(\mathrm{R}+a)^2 - r^2},$$

on a l'équation connue

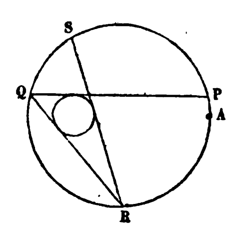
$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

d'où l'on peut conclure une construction géométrique de son intégrale. Mais on peut en déduire un résultat nouveau.

L'équation précédente devient, en intégrant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k\sin^2\varphi}} + \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \\ = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}} \end{aligned} \right.$$

et μ est la valeur de ψ pour $\varphi = 0$. On voit que μ ne dépend ni de φ ni de ψ; si donc, à partir du point φ, on mène une seconde tangente QR au cercle intérieur, et



si l'on pose $AR = 2\chi$, on aura encore, en posant

$$1 - k^2 \sin^2\varphi = \Phi, \quad 1 - k^2\sin^2\psi = \Psi, \quad \ldots, \quad 1 - k^2\sin^2\mu = M,$$

$$(3) \qquad -\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi}} + \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{X}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}};$$

en menant par R une nouvelle tangente RS, on aurait entre l'arc $2\theta = AS$ et l'arc 2χ une relation analogue: les intégrales $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}$, $\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi}}$, ... forment donc une progression arithmétique dont la raison est $\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$.

Supposons que le polygone PQRST soit fermé et que le point T coïncide avec A, le dernier des arcs φ, ψ, χ,... sera de la forme $\varphi + 2n\pi$. En ajoutant alors les formules, telles que (2) et (3), on a

$$-\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} + \int_0^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} = m \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$$

ou bien

$$\int_{\varphi}^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = m \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}};$$

donc le premier membre de cette formule ne dépend pas de φ; donc :

S'il existe un polygone de m côtés inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, il existera une infinité de polygones de m côtés jouissant de la même propriété.

Ce théorème est évidemment projectif et s'applique aux coniques : il a été découvert par Poncelet; la démonstration précédente est de Jacobi.

ADDITION DES ARCS D'ELLIPSE. — THÉORÈME DE FAGNANO.

Nous avons posé

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx.$$

Nous aurons alors

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2(x+y)\, dx = \int_0^{x+y} k^2 \operatorname{sn}^2(x+y)\, dx - \int_0^y k^2 \operatorname{sn}^2 y \, dy$$

ou

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2(x+y)\, dx = Z(x+y) - Z(y),$$

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2(x-y)\, dx = Z(x-y) + Z(y).$$

Retranchons ces formules l'une de l'autre, en ayant égard aux relations

$$\operatorname{sn}(x+y) + \operatorname{sn}(x-y) = \frac{2 \operatorname{sn} x \ \operatorname{cn} y \ \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \ \operatorname{sn}^2 x \ \operatorname{sn}^2 y},$$

$$\operatorname{sn}(x-y) + \operatorname{sn}(x-y) = \frac{2 \operatorname{sn} y \ \operatorname{cn} x \ \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \ \operatorname{sn}^2 x \ \operatorname{sn}^2 y};$$

nous aurons

$$\int_0^x \frac{4k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y)^2}\, dx$$

$$= Z(x+y) - 2Z(y) - Z(x-y).$$

Le premier membre est une dérivée exacte, si l'on observe que $2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ est le dérivé de $\operatorname{sn}^2 x$, et l'on a

$$\frac{2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y} = Z(x+y) - 2Z(y) - Z(x-y).$$

Si l'on pose alors

$$\varphi = \operatorname{am} x,\quad \psi = \operatorname{am} y,\quad \mu = \operatorname{am}(x+y),\quad \nu = \operatorname{am}(x-y),$$

et si l'on observe que Zu devient $J(\operatorname{am} u)$, et que

$$Z(x) = J(\varphi) = F(\varphi) - E(\varphi), \ldots,$$

la formule précédente devient

$$\frac{2 \sin^2\varphi \sin\psi \cos\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi}$$
$$= F(\mu) - 2F(\psi) - F(\nu) - E(\mu) + 2E(\psi) + E(\nu);$$

et comme $F(\mu) = F(\varphi) + F(\psi)$,

$$\frac{2 \sin^2\varphi \sin\psi \cos\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi} = -E(\mu) + E(\nu) + 2E(\psi),$$

si l'on échange φ et ψ, μ ne change pas, ν se change en $-\nu$ et le second devient $-E(\mu) - E(\nu) + 2E(\varphi)$.

En ajoutant alors à cette formule celle que l'on obtient en changeant φ en ψ, et *vice versâ*, on trouve [eu égard à la formule qui fait connaître $\operatorname{sn}(x+y)$]

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu.$$

On obtient le théorème de Fagnano en posant $\mu = \frac{\pi}{2}$,

alors $E(\mu)$ est le quart d'ellipse; nous le désignerons par E et nous aurons

$$(1)\qquad F(\varphi) + E(\psi) - E = k^2 \sin\varphi \sin\psi.$$

Entre les angles φ, ψ, μ, on a la relation

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu}.$$

Si alors on fait $\mu = \frac{\pi}{2}$, on a

$$o = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2}$$

ou

$$(2)\qquad \tang\varphi \tang\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \quad \text{ou} \quad b \tang\varphi \tang\psi = 1.$$

La formule (1) montre que, si les arcs d'ellipse $E(\varphi)$ et $E - E(\psi)$ sont tels qu'ils correspondent à des anomalies φ, ψ satisfaisant à la formule (2), leur différence est rectifiable. Les équations de l'ellipse sont

$$x = \sin\varphi, \quad y = \sqrt{1 - k^2} \cos\varphi = b \cos\varphi.$$

Si l'on cherche la distance l du point φ de l'ellipse à la perpendiculaire menée de l'origine sur la tangente, on trouve

$$l = \frac{k^2 \tang\varphi}{\sqrt{(b^2 \tang^2 + 1)(1 + \tang^2\varphi)}}.$$

En chassant les dénominateurs, on trouve une équation du quatrième degré en $\tang\varphi$, à savoir

$$b^2 \tang^4\varphi + \tang^2\varphi \left(1 + b^2 - \frac{k^4}{l^2}\right) + 1 = 0.$$

Soient φ et ψ les deux solutions de cette équation, on en déduit

$$b \tang\varphi \tang\psi = 1.$$

L'identité de cette formule avec (2) montre de quelle

façon doivent être construits les angles φ et ψ. On voit que les arcs $E(\varphi)$ et $E - E(\psi)$ auront une différence rectifiable, s'ils sont choisis de telle sorte que les normales menées par leurs extrémités soient à des distances égales du centre de l'ellipse.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Mémoire sur l'élimination, par M. *H. Lemonnier*, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV. Paris, Gauthier-Villars; 1879.

Dans les séances du 11 et du 25 janvier 1875, M. Bertrand a bien voulu communiquer à l'Académie les principaux résultats d'un travail que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui (26 juillet, même année) à son appréciation.

Ce Mémoire, annoncé par M. le Secrétaire perpétuel, dans la séance du 25 janvier, est divisé en trois Parties.

La première a pour objet de mettre en évidence l'intime liaison qui unit, au point de vue analytique, les méthodes d'élimination connues sous les noms d'Euler, de Sylvester, de Cayley, de Bezout, de Cauchy. J'en ai déduit l'expression et la formation, par des déterminants, des conditions suffisantes et requises pour que deux équations entières en x,

$$F(x) = Ax^m + \ldots + A_m, \quad f(x) = ax^n + \ldots + a_n,$$

aient p racines communes, ainsi que de l'équation propre à donner ces racines, ou du plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

La deuxième Partie consiste dans l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir ces conditions, et l'équation aux racines communes. L'application en est immédiate au théorème de Sturm. Les polynômes qui proviennent d'une fonction entière et de sa dérivée sont des fonctions équivalentes aux fonctions de Sturm proprement dites. Les premiers termes, les derniers,

tels termes qu'on veut, peuvent se calculer à part. Le procédé de calcul nous paraît d'une grande sûreté et d'une simplicité qui pourra contribuer à donner un intérêt pratique au théorème de l'illustre Genevois.

Dans la troisième Partie, les mêmes considérations sont appliquées à la résolution de deux équations entières en x et y,

$$\Phi(x,y)=0,\quad \varphi(x,y)=0.$$

Les solutions du système s'obtiennent sans omission et directement, sans calculs qui portent à faux, avec l'avantage, si les deux polynômes ont un plus grand commun diviseur dépendant de x et de y, de le faire trouver en même temps que l'équation finale due à sa suppression.

Ajoutons que les systèmes particuliers auxquels conduit la méthode de M. Labatie s'obtiennent également par l'application de notre procédé, de sorte que l'équation finale peut être débarrassée des racines qui y figurent. Mais la méthode de M. Labatie, par la succession même des divisions, donne lieu à une complication qui ressort des liaisons qui unissent nos polynômes, comme du rapprochement que nous faisons entre les deux procédés.

Il n'est question, du reste, dans ce travail, que de racines communes ayant des modules finis, et de solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

Introduction. — Objet du Mémoire, sa division en trois Parties.

Première Partie. — I. Nos 1, 2. Sur l'identité d'Euler au cas d'une racine commune et au cas de p racines communes.

II. Nos 3, 4, 5, 6. Équivalence du procédé de Sylvester et de celui d'Euler pour une racine commune. La nullité du déterminant qu'ils donnent, d'ordre $m+n$, et le fait qu'un autre déterminant d'ordre $m+n-2$ constitue ce qui est nécessaire et suffisant pour l'existence d'une seule racine commune.

III. Nos 7-15. On établit comme conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de p racines communes le fait qu'un déterminant défini d'ordre $m+n-2p$ soit différent de zéro et que p déterminants d'ordre $m+n-2p+2$, également fixés, soient nuls séparément. — Mode particulier de formation de l'équation aux racines communes, du plus grand commun diviseur de degré p.

IV. Nos 15-18. Équations de Bézout, équations de Cauchy au cas d'une racine commune; leur équivalence à celles de Sylvester. Autre forme que précédemment pour les conditions nécessaires et suffisantes au cas d'une seule racine commune.

N°s 19, 20, 21. Les conditions établies au paragraphe précédent sont présentées sous une forme différente : d'une part p déterminants d'ordre $m-p+1$ s'égalant à zéro, et d'autre part un déterminant d'ordre $m-p$, différent de zéro. — Nullité qui s'ensuit de déterminants d'ordre supérieur jusqu'à celui de Sylvester.

Deuxième Partie. — I. N°s 22, 23, 24. Calcul des polynômes R_{n-p} qui, d'après la règle du n° 14, sont les plus grands communs diviseurs pour $p=n-1$, $n-2$, $n-3$, ... Le polynôme R_{n-p} divise les précédents, s'il y a p racines communes ; le fait que son premier coefficient ne soit pas nul, et la nullité des coefficients de R_{n-p+1} sont les conditions pour avoir p racines communes, et dès lors les polynômes d'indice plus élevé sont tous nuls.

N°s 25, 26. Les polynômes R sont, à des facteurs près indépendants de x, les diviseurs consécutifs que donne le procédé de la division dans la recherche du plus grand commun diviseur.

N°s 27, 28. Relations entre les polynômes R :

$$a^{m-n+1}F(x)=f(x).Q+R_1(-1)^{\frac{m-n}{2}\text{ ou }\frac{m-n+1}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x)=R_1 Q_1-a^{m-n+1}R_2(-1)^{\frac{m-n-1}{2}\text{ ou }\frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_2^2 R_1=R_2 Q_2-\alpha_1^2 R_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_{p+1}^2 R_p=R_{p+1}Q_{p+1}-\alpha_p^2 R_{p+1}.$$

N°s 29, 30. Sur les polynômes R_p, quand leurs degrés ne sont pas consécutifs.

N° 31. Sur les polynômes déduits de R_p et R_{p+1} en les traitant comme $F(x)$ et $f(x)$.

N°s 32-35. Remarques diverses.

II. N°s 36, 37. Autre mode de formation de polynômes R_p, pour lesquels on a

$$\mathcal{R}_{2k+1}=(-1)^{m-n+1}R_{2k+1},$$

$$\mathcal{R}_{2k}=R_{2k},$$

$$a^{m-n+1}F(x)=f(x).Q-\mathcal{R}_1(-1)^{\frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x)=\mathcal{R}_1(-Q_1)-Q^{m-n+1}\mathcal{R}_2(-1)^{\frac{m-n-1}{2}},$$

$$\alpha_{p+1}^2\mathcal{R}_p=\mathcal{R}_{p+1}(+Q_{p+1})-\alpha_p^2\mathcal{R}_{p+2}.$$

N° 38. Cas particulier de $m=n$.

III. N° 39. Application au théorème de Sturm.

N° 40. Les premiers coefficients des polynômes R_1, R_2 sont les nombres p_μ de M. Borchardt.

N° 41. Exemples divers. — Abaissement d'une unité dans l'ordre des déterminants, en opérant par $f(x) = \varphi(x, y)$, par $\varphi'_x(x, y)$ et $\varphi'_x(x, y)$.

TROISIÈME PARTIE. — I. Application à la résolution des équations entières en x et y. — Règle à suivre.

II. Évaluation du degré maximum de y dans les coefficients des polynômes en R ou R_p.

III. Comparaison entre ce procédé et celui de M. Labatie.

IV. Exemples divers.

2. MÉMOIRE SUR LA TRANSFORMATION DES FORMES LINÉAIRES DES NOMBRES PREMIERS EN FORMES QUADRATIQUES, par *G. Oltramare*, professeur à l'Université de Genève.

3. DEUX LETTRES INÉDITES de *Joseph-Louis Lagrange*, tirées de la Bibliothèque royale de Berlin. (Collection Meusebach, portefeuille n° 21, et collection Radowitz, n° 4952), et publiées par *B. Boncompagni*. Berlin, imprimerie de *Gustav Schade* (Otto Francke); 1878.

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Dans le numéro de février, M. Lucas donne des formules par lesquelles, connaissant une solution (x, y, z) de l'équation $aX^4 + bY^4 = (a + b)Z^2$, on obtient deux autres solutions : les polynômes X et Y sont d'ailleurs respectivement du vingt-quatrième et du vingt-deuxième degré en x, y, z. Mais, dans les *Comptes rendus* du 22 octobre 1878, j'ai donné, pour résoudre la même équation, deux systèmes de formules qui permettent chacun de déduire d'une première solution connue deux autres solutions, et, suivant qu'il s'agit du premier ou du second système, X, Y sont tous deux des polynômes du

troisième ou du sixième degré [1]. Si donc on applique simultanément les formules des deux systèmes, d'une première solution on en déduira quatre autres.

Ainsi, en partant de la solution (1, 2, 7) de l'équation $X^4 + 3Y^4 = Z^2$, on obtient les quatre solutions (1, 0, 1), (11, 3, 122), (47, 28, 2593), (13, 475, 39074), dont la dernière paraît avoir échappé aux formules de M. Lucas. Le jeune et habile arithmologue montre d'ailleurs que le cas particulier dont il s'est occupé conduit immédiatement à la résolution de l'équation générale $aX^4 + bY^4 = cZ^2$, et je lui suis très-reconnaissant de l'importance nouvelle qu'il donne à mes formules par son heureuse généralisation.

Je rappelle encore que, dans les *Comptes rendus* du 7 et du 22 octobre, j'ai donné de nouvelles formules qui s'appliquent immédiatement à l'équation générale et qui peuvent même, comme je l'ai annoncé, s'étendre au cas où l'équation biquadratique contient le terme supplémentaire dx^2y^2, tandis que M. Lucas ne fait cette extension que dans un cas particulier.

En résumé, il me semble que la résolution de l'équation biquadratique n'est pas restée stationnaire, comme le croit M. Lucas, à qui sans doute les résultats de mes recherches sont restés inconnus.

A. Desboves.

ERRATUM.

Page 75, au lieu de *Boulliou*, lisez *Boulliau*.

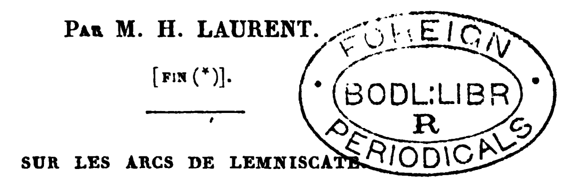
---

(1) Dans les *Comptes rendus*, je disais que le nombre des solutions donné par chaque système était égal à 4; mais j'ai reconnu depuis qu'il se réduit à 2.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[FIN (*)].



SUR LES ARCS DE LEMNISCATE.

La lemniscate est, comme l'on sait, une courbe telle que le produit de ses rayons vecteurs issus de deux points fixes est constant. Son équation en coordonnées polaires est, en prenant pour axe polaire la droite qui joint les points fixes et pour origine le milieu de cette droite,

$$r^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + a^4 = b^4,$$

$2a$ désignant la distance des points fixes et b une constante.

M. Serret, dans un Mémoire inséré au tome VIII du *Journal de M. Liouville,* a montré que toute fonction elliptique de première espèce pouvait être représentée par deux arcs de lemniscate. Voici son analyse :

Soit $\frac{b}{a} < 1$, la courbe se compose de deux branches distinctes. On pose $\frac{b^2}{a^2} = \sin 2\psi$. Soient s'_0 et σ'_0 les deux arcs de lemniscate, dont les extrémités ont pour angles polaires θ_0 et θ_1, on a

$$s'_0 = \frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}\,d\theta$$

$$\sigma'_0 = \frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta - \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}\,d\theta.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 126.

On déduit de là, en ajoutant et en retranchant,

$$s_0^1 + \sigma_0^1 = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta - \cos 2\psi}}$$

$$s_0^1 - \sigma_0^1 = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d'\theta}{\sqrt{\cos 2\theta + \cos 2\psi}}.$$

Si l'on pose, dans la première formule,

$$\sin\theta = \sin\psi \sin\varphi;$$

dans la seconde,

$$\sin\theta = \cos\psi \sin\varphi,$$

on a

$$s_0^1 + \sigma_0^1 = \frac{b^2}{a}\left[F(\sin\psi, \varphi_1) - F(\sin\psi, \varphi_0)\right]$$

$$s_0^1 - \sigma_0^1 = \frac{b^2}{a}\left[F(\cos\psi, \varphi_1) - F(\cos\psi, \varphi_0)\right].$$

On voit que les modules de $s_0^1 + \sigma_0^1$ et de $s_0^1 - \sigma_0^1$ sont complémentaires.

Un calcul un peu différent conduit aux mêmes conclusions quand on suppose $\frac{b}{a} > 1$; mais alors ce sont les arcs correspondant à des rayons vecteurs perpendiculaires qu'il faut désigner par s_0^1, σ_0^1.

La lemniscate de Bernoulli est la plus célèbre ; elle a pour équation

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

L'arc de cette courbe est donné par la formule

$$ds = \frac{a\sqrt{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Si l'on pose

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi,$$

on a

$$ds = a\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi}}.$$

On en conclut, en comptant convenablement l'arc,

$$s = a\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right)$$

ou bien

$$s = a\,\mathrm{F}\left[\frac{1}{2}, \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)\right].$$

On trouve aussi

$$s = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2a}\right)}}.$$

AIRES DE QUELQUES COURBES.

La quadrature d'une courbe du troisième degré ne dépend absolument que des fonctions elliptiques ; pour nous en convaincre, plaçons l'origine sur la courbe : l'équation de la courbe sera de la forme

$$\varphi_3(x, y) + 2\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0,$$

φ_1, φ_2, φ_3 désignant des polynômes homogènes de degrés 1, 2, 3. On peut l'écrire

$$x^2\varphi_3\left(1, \frac{y}{x}\right) + 2x\,\varphi_2\left(1, \frac{y}{x}\right) + \varphi_1\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

et, en posant

$$y = tx,$$

on a

$$x^2\varphi_3(1, t) + 2x\,\varphi_2(1, t) + \varphi_1(1, t) = 0.$$

On en tire

$$x = \frac{-\varphi_2 \pm \sqrt{\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3}}{\varphi_3};$$

en appelant alors R un polynôme du quatrième degré, on voit que x est de la forme $f(t, R)$, où f désigne une fonction rationnelle; $\frac{dx}{dt}$ et $y = tx$ seront de la même forme, et par suite l'intégrale

$$\int y\,dx = \int y \frac{dx}{dt}\,dt$$

ne dépendra que des fonctions elliptiques.

Lorsqu'une courbe du quatrième degré a deux points doubles, on peut aussi exprimer son aire au moyen des fonctions elliptiques. En effet, au moyen d'une transformation homographique, on peut transporter les deux points doubles à l'infini : soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la courbe ainsi transformée ; on peut supposer que $z = 0$, $x = 0$ et $z = 0$, $y = 0$ soient les coordonnées des points doubles. Quand on fera

$$z = 0, \quad x = 0$$

dans les formules

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0,$$

elles devront être satisfaites ; les dérivées des termes du quatrième degré en x et y devront donc s'annuler pour $x = 0$, ce qui exige que le terme en y^4 et le terme en xy^3 soient nuls ; la dérivée $\frac{df}{dz}$ étant nulle pour $x = 0$, il faut que le terme en x^3 soit nul également ; on verrait de même que les termes x^3y, et x^4 ainsi que y^3, disparaissent. L'équation de la courbe prend donc la forme

$$\begin{aligned} &Ax^2y^2 + Bx^2y + Cxy^2 \\ &\quad + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + K = 0, \end{aligned}$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à y, on trouve pour cette fonction une expression rationnelle par rapport à x et par rapport à un radical recouvrant un polynôme du quatrième degré.

SUR LES COURBES DE DEGRÉ m QUI ONT $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ POINTS DOUBLES.

On sait que $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ est le nombre maximum de points doubles que puisse posséder une courbe d'ordre m.

Une courbe d'ordre m qui possède $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles est quarrable par les fonctions algébriques et logarithmiques (y compris les fonctions circulaires inverses).

Il suffit de prouver que l'x et l'y de cette courbe sont fonctions rationnelles d'un même paramètre λ; pour y parvenir par les $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles D de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

d'ordre m, faisons passer une courbe d'ordre $m-2$. Cette courbe est déterminée quand on l'assujettit à passer par $\frac{1}{2}(m-2)(m+1)$ points; or, elle passe déjà par $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points D : on peut donc l'assujettir encore à

$$\frac{1}{2}(m-2)(m+1) - \frac{1}{2}(m-1)(m-2) = m-2$$

conditions. Nous l'assujettirons à rencontrer la courbe (1) en $m-3$ points fixes que nous appellerons A; elle contiendra alors dans son équation un paramètre arbi-

traire λ, et cette équation sera

$$(2) \qquad \varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y) = 0.$$

Mais cette courbe (2) coupe (1) en $m(m-2)$ points; sur ces $m(m-2)$ points, les points D comptent pour deux et équivalent à $(m-1)(m-2)$ points d'intersection; si l'on y ajoute les $m-1$ points A, on voit que

$$(m-1)(m-2) + m - 3 = m^2 - 2m - 1$$

points d'intersection des courbes (1) et (2) sont fixes et connus; il n'en reste plus que

$$m(m-2) - (m^2 - 2m - 1) = 1$$

qui soient variables. Si l'on forme alors la résultante des équations (1) et (2), toutes les racines x de cette résultante seront connues et indépendantes de λ, à l'exception d'une seule que l'on obtiendra par suite à l'aide d'une simple division et qui sera rationnelle en λ. Ainsi x et y s'exprimeront rationnellement en fonction de λ.

C. Q. F. D.

Réciproquement, on peut prouver que, *si x et y sont des fonctions rationnelles de λ de la forme* $\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$, $\frac{\chi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$, *$\varphi$, χ, ψ étant de degrés m au plus, x et y seront les coordonnées d'une courbe d'ordre m ayant* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *points doubles.*

Posons, en effet,

$$(1) \qquad \frac{x}{\varphi(\lambda,\mu)} = \frac{y}{\chi(\lambda,\mu)} = \frac{z}{\psi(\lambda,\mu)},$$

z étant introduit ici pour l'homogénéité ainsi que μ (nous supposerons ultérieurement $z=1$, $\mu=1$). La courbe représentée par les équations (1) coupera la droite

$$(2) \qquad ax + by + cz = 0$$

en m points, car les λ d'intersection seront donnés par la formule du degré m

$$a\varphi(\lambda,\mu)+b\chi(\lambda,\mu)+c\psi(\lambda,\mu)=0.$$

λ aura m valeurs et par suite x et y auront m valeurs simultanées.

Comptons maintenant les points d'inflexion ; ces points satisfont à l'équation (2) et aux suivantes :

$$(3)\qquad a\frac{dx}{d\lambda}+b\frac{dy}{d\lambda}+c\frac{dz}{d\lambda}=0,$$

$$(4)\qquad a\frac{d^2x}{d\lambda^2}+b\frac{d^2y}{d\lambda^2}+c\frac{d^2z}{d\lambda^2}=0;$$

or, en vertu du théorème des fonctions homogènes, (2) et (3) peuvent s'écrire

$$(5)\qquad a\left(x^2\frac{d^2x}{d\lambda^2}+2xy\frac{d^2x}{d\lambda d\mu}+\mu^2\frac{d^2x}{d\mu^2}\right)+\ldots=0,$$

$$(6)\qquad a\left(x\frac{d^2x}{d\lambda^2}+y\frac{d^2x}{d\lambda\, d\mu}\right)+\ldots=0;$$

la résultante des formules (4), (5), (6) donnera les λ des points d'inflexion. Or (5) et (6) se simplifient et peuvent s'écrire

$$a\frac{d^2x}{d\mu^2}+b\frac{d^2y}{d\mu^2}+c\frac{d^2z}{d\mu^2}=0,$$

$$a\frac{d^2x}{d\lambda d\mu}+b\frac{d^2\mu}{d\lambda d\mu}+c\frac{d^2z}{d\lambda d\mu}=0,$$

et la résultante cherchée prend la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{d\lambda^2} & \frac{d^2y}{d\lambda^2} & \frac{d^2z}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2x}{d\lambda d\mu} & \frac{d^2y}{d\lambda d\mu} & \frac{d^2z}{d\lambda d\mu} \\ \frac{d^2x}{d\mu^2} & \frac{d^2y}{d\mu^2} & \frac{d^2z}{d^2\mu} \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est manifestement du degré $3(m-2)$; ainsi la courbe considérée possède $3(m-2)$ points d'inflexion. Or une courbe d'ordre m possède normalement $3m(m-2)$ points d'inflexion; celle que nous considérons en a donc perdu

$$3m(m-2)-3(m-2)=3(m-1)(m-2).$$

Or on sait que les points d'inflexion ne disparaissent que parce qu'ils se trouvent remplacés par des points singuliers. Chaque point double faisant disparaître six points d'inflexion, on en conclut que $\frac{3(m-1)(m-2)}{6}$ ou $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles se sont attachés à la courbe. C. Q. F. D.

Il faut bien remarquer que dans notre raisonnement nous avons tenu compte des points situés à l'infini, ce qui résulte de l'emploi des coordonnées homogènes. En second lieu, nous n'avons, en fait de points singuliers, considéré que des points doubles, mais il est clair que nos énoncés devront être corrigés si les points singuliers, au lieu d'être des points doubles, devenaient points triples ou seulement points de rebroussement.

Les théorèmes précédents sont dus à M. Clebsch qui les a établis, mais moins simplement, dans le *Journal de Crelle* (t. 64, p. 43).

SUR LES COURBES D'ORDRE m POSSÉDANT $\frac{1}{2}m(m-3)$ POINTS DOUBLES.

Les courbes d'ordre m possédant $\frac{1}{2}m(m-3)$ *points doubles sont quarrables par les fonctions elliptiques.*

Pour démontrer ce théorème, considérons une courbe

$$(1) \qquad f(x,y)=0,$$

d'ordre m, possédant $\frac{1}{2}m(m-3)$ points doubles D; ce nombre est égal à $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-1$, c'est-à-dire au maximum du nombre des points doubles moins un. Pour déterminer une courbe d'ordre $m-2$, il faut $\frac{1}{2}(m-2)(m+1)$ conditions; on pourra donc assujettir une courbe d'ordre $m-2$ à passer par les $\frac{1}{2}m(m-3)$ points D et par

$$\frac{1}{2}(m-2)(m+1)-\frac{1}{2}m(m-3)-1=m-2$$

autres points de la courbe (1), que nous appellerons A. Cette courbe contiendra dans son équation un paramètre arbitraire λ et pourra être représentée sous la forme

$$(2)\qquad \varphi(x,y)+\lambda\psi(x,y)=0;$$

mais cette courbe (2) coupe la courbe (1) d'abord en $m(m-3)$ points confondus avec les points doubles D qui comptent pour deux, et en $m-2$ points A, ce qui fait en tout m^2-2m-2 points; or les courbes (1) et (2) devant se couper en $m(m-2)$ points, il restera deux points que j'appellerai B sur la courbe (1) et par lesquels passera encore la courbe (2). Nous supposerons les points A fixes; les points B dépendront alors de la valeur attribuée à λ; nous les déterminerons comme il suit :

Par l'origine, imaginons une série de droites

$$(3)\qquad y=\alpha x,$$

passant par les intersections A, B, D des courbes (1) et (2); les coefficients angulaires α seront racines de l'équation

$$(4)\qquad (y_1-\alpha x_1)(y_2-\alpha x_2)(y_3-\alpha x_3)\ldots=0 \quad \text{ou} \quad R=0,$$

dans laquelle (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... sont les solutions communes à (1) et (2); on peut supposer que $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ sont les coordonnées des points B. Alors on voit: 1° que l'équation (4) est la résultante de (1), (2) et (3); 2° que cette résultante est divisible par le facteur

$$(y_1 - \alpha x_1)(y_2 - \alpha x_2),$$

que nous représenterons par

$$(5) \qquad A\alpha^2 + 2B\alpha + C = 0 \quad \text{ou} \quad R_1 = 0,$$

et qu'il sera facile de former. Ce facteur fera connaître les coefficients angulaires des droites allant de l'origine aux points B; 3° la résultante $R = 0$ pouvant s'obtenir en éliminant x entre

$$f(x, \alpha x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, \alpha x) + \lambda\psi(x, \alpha x) = 0$$

sera de degré m par rapport à λ; mais comme, dans cette résultante, $x_3, y_3, x_4, y_4, \ldots$ sont indépendants de λ, le facteur $A\alpha^2 + 2B\alpha + C$ le contiendra seul et par suite l'équation (5) sera du degré m en λ.

On tire de (5)

$$(6) \qquad \alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

en ne considérant que l'une des valeurs de α; la valeur correspondante de x s'obtiendra par les considérations suivantes : soient a_{ij} et b_{ij} les coefficients de $x^i y^j$ dans φ et ψ et $C_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij}$, faisons varier a_{ij}, b_{ij}, a_{kl}, b_{kl} de manière à ne pas altérer la résultante $R_1 = 0$; les quantités x ne varieront pas, et l'on aura

$$\frac{dR_1}{dC_{ij}} dC_{ij} + \frac{dR_1}{dC_{kl}} dC_{kl} = 0,$$

$$\frac{d(\varphi + \lambda\psi)}{dC_{ij}} dC_{ij} + \frac{d(\varphi + \lambda\psi)}{dC_{kl}} dC_{kl} = 0;$$

cette dernière formule peut s'écrire

$$x^i y^j dC_{ij} + x^k y^l dC_{kl} = 0,$$

et l'on en conclut

(7) $$\frac{dR_1}{dC_{ij}} : x^i y^j = \frac{dR_1}{dC_{kl}} : x^k y^l;$$

de là plusieurs manières de se procurer x en fonction rationnelle de α et de λ, par exemple au moyen de l'équation

$$\frac{dR_1}{dC_{10}} : x = \frac{dR_1}{dC_{00}}.$$

Maintenant revenons à la formule (6), pour étudier la quantité $B^2 - AC$ placée sous le radical et la décomposer en facteurs. Pour cela annulons-la : l'équation $R_1 = 0$ aura une racine double; les droites allant de l'origine aux points B seront confondues, ce qui peut avoir lieu : 1° soit parce que les points B sont en ligne droite avec l'origine; 2° soit parce que les points B sont confondus.

1° Supposons d'abord les points B en ligne droite avec l'origine, x doit être indéterminé; donc, dans les formules (7), les $\frac{dR_1}{dC_{ij}}$ doivent être nuls. Or on a

$$\frac{dR_1}{d\lambda} = \sum \frac{dR_1}{dC_{ij}} \frac{dC_{ij}}{d\lambda} = \sum \frac{dR_1}{dC_{ij}} b_{ij} = 0;$$

mais, l'équation (5) ayant une racine double, on a aussi

$$\frac{dR_1}{d\alpha} = 0;$$

or, quand on pose $\frac{dR_1}{d\alpha} = 0$ ou $A\alpha + B = 0$, ou $\alpha = -\frac{A}{B}$. R_1 se réduit à

$$R_1 = -\frac{B^2 - AC}{A};$$

en égalant $\frac{dR_1}{d\lambda}$ à zéro, on a alors

$$\frac{1}{A}\frac{d(B^2 - AC)}{d\lambda} = \frac{d\frac{1}{A}}{d\lambda}(B^2 - AC) = 0;$$

donc enfin $B^2 - AC$ s'annule en même temps que sa dérivée pour les valeurs λ pour lesquelles deux points B sont en ligne droite avec l'origine; $B^2 - AC$ aura donc autant de facteurs doubles qu'il y aura de valeurs de λ pour lesquelles les points B sont en ligne droite avec l'origine, et l'on pourra écrire

$$\sqrt{B^2 - AC} = \Theta(\lambda)\sqrt{V}.$$

2° Supposons maintenant les points B confondus, les valeurs de λ pour lesquelles cette circonstance se présentera s'obtiendront en exprimant que les courbes (1) et (2) se touchent : alors aux points de contact on aura

$$\frac{df}{dx} : \left(\frac{d\varphi}{dx} + \lambda\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{df}{dy} : \left(\frac{d\varphi}{dy} + \lambda\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{df}{dz} : \left(\frac{d\varphi}{dz} + \lambda\frac{d\psi}{dz}\right);$$

en égalant ces rapports à $\frac{1}{\rho}$, en chassant les dénominateurs, puis en éliminant ρ et λ, on trouve

$$(8) \qquad J = 0,$$

J désignant le déterminant de f, φ, ψ. L'équation (8) est celle de la *jacobienne* des courbes $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$; or on sait que (Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure*, traduites par Bazin, p. 72) si les courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont de même degré : 1° la jacobienne passe par les points communs aux trois courbes; 2° si $f = 0$ a un point singulier en D, la jacobienne y a un point singulier avec les mêmes tangentes et par conséquent coupe $f = 0$ en six points confondus en D; 3° la jacobienne touche la

courbe f aux points A et par conséquent y coupe f en deux points confondus.

Or la jacobienne est de degré

$$m - 1 + 2(m - 2) = 3m - 7;$$

elle coupe $f = 0$ en $m(3m - 7)$ points dont il faut défalquer les points D au nombre de

$$6 \frac{1}{2} m(m - 3) = 3m(m - 3),$$

et les points A au nombre de $2(m - 2)$; il reste donc

$$m(3m - 7) - 3m(m - 3) - 2(m - 2) = 4$$

points où la jacobienne peut rencontrer $f = 0$ et par suite où la courbe (2) peut toucher (1), et par suite quatre valeurs de λ pour lesquelles $B^2 - 4AC$ s'annule par le fait du contact de (1) et (2). Le polynôme V est donc du quatrième degré en λ; d'où il résulte que l'x et par suite l'x et l'y d'un point variable B de la courbe $f = 0$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre λ et d'un radical de la forme

$$\sqrt{\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta},$$

ce qui démontre le théorème énoncé plus haut.

La première démonstration de ce théorème est due à M. Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 210).

Remarque. — On pourra représenter les coordonnées x, y de la courbe (1) sous la forme

$$x = F\left[\lambda, \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}\right],$$
$$y = \Phi\left[\lambda, \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}\right],$$

à l'aide d'une transformation rationnelle opérée sur la variable λ; si l'on fait alors $\lambda = \operatorname{sn} t$, on aura

$$x = G(\operatorname{sn} t) + \operatorname{sn}' t \, H(\operatorname{sn} t)$$
$$y = K(\operatorname{sn} t) + \operatorname{sn}' t \, L(\operatorname{sn} t),$$

G, H, K, L désignant des fonctions rationnelles. En effet, le radical entrera si l'on veut dans x et y sous forme linéaire; or il est égal à $\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t$, c'est-à-dire à $\operatorname{sn}' t$.

C. Q. F. D.

Ainsi, quand une courbe a son maximum de points doubles moins 1, ses coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un même sinus amplitude et sa dérivée, ou, si l'on veut encore, sont des fonctions doublement périodiques de même période d'une même variable.

QUELQUES COURBES REMARQUABLES DONT L'ÉQUATION DÉPEND DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Lorsque l'on cherche une courbe plane dont le rayon de courbure soit proportionnel à l'inverse de l'abscisse, on est conduit à l'équation

$$y = \int_0^x \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}}\, dx.$$

Cette courbe est une élastique, on la rencontre encore quand on cherche parmi les courbes isopérimètres celle qui engendre le volume de révolution minimum; en transformant convenablement les coordonnées, on peut prendre $c = 0$: alors on a $\frac{dy}{dx} = 0$, quand $x = 0$, et

$$y = \int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

ou

$$y = \int_0^x \frac{x^2\, dx}{a^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}}.$$

Si l'on fait $\frac{x}{a} = t$, on a

$$y = \int_0^t \frac{at^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+t^2)}};$$

or, en prenant le module k égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, en sorte que $k^2 = k'^2$, on a

$$\text{cn}'\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1-\text{cn}^2\theta)(1+\text{cn}^2 t)};$$

si donc on fait

$$t = \text{cn}\,\theta, \quad dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1-t^2)(1+t^2)}\,d\theta,$$

on aura

$$y = -\int_\theta^{\pm K} a\frac{\sqrt{2}}{2}\,d\theta\,\text{cn}^2\theta = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\int_\theta^{\pm K}(1-\text{sn}^2\theta)\,d\theta;$$

la limite inférieure est d'ailleurs arbitraire si l'on choisit convenablement l'origine : on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} y = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\theta + \dfrac{a\sqrt{2}}{4}Z(\theta), \\ x = a\,\text{cn}\,\theta. \end{array}\right.$$

La courbe de M. Delaunay engendrée par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur une droite a pour équation

$$dy = \frac{(x^2 \pm b^2)\,dx}{\sqrt{4a^2x^2 - (x^2 \pm b^2)^2}};$$

son abscisse et son ordonnée s'exprimeront facilement aussi par les fonctions elliptiques. Dans cette courbe, la moyenne harmonique du rayon de courbure et de la normale est constante.

SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT.

Les équations du mouvement d'un corps solide qui présente un point fixe et qui n'est sollicité par aucune force extérieure sont, comme on sait,

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr,\\
B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq.
\end{aligned}
\right.
$$

A, B, C sont les moments d'inertie principaux relatifs au point fixe; p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée autour des axes principaux relatifs au même point; enfin, t est le temps.

L'analogie entre les équations (1) et celles qui lient entre eux $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ et leurs dérivées est telle, que l'on est tenté de poser

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha\,\mathrm{cn}\,g(t-\tau),\\
q &= \beta\,\mathrm{sn}\,g(t-\tau),\\
r &= \gamma\,\mathrm{dn}\,g(t-\tau),
\end{aligned}
$$

α, β, γ, g, τ et le module k désignant des constantes arbitraires; et l'on satisfera effectivement aux formules (1) si, observant que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cn}'x &= -\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x,\\
\mathrm{sn}'x &= \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x,\\
\mathrm{dn}'x &= -\,k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x,
\end{aligned}
$$

on prend

$$
(a)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= gk\sqrt{\frac{BC}{(A-B)(A-C)}},\\
\beta &= gk\sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}},\\
\gamma &= g\sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules, auxquelles on est conduit ainsi par la méthode des coefficients indéterminés, fourniront pour α, β, γ des valeurs réelles si l'on a $A > B > C$, ce qu'il est toujours permis de supposer.

Les trois arbitraires de la solution sont g, k, τ. On peut faire abstraction de la dernière τ, et, en comptant convenablement le temps, poser

$$(2) \qquad p = \alpha \operatorname{cn} gt, \quad q = \beta \operatorname{sn} gt, \quad r = \gamma \operatorname{dn} gt.$$

Les formules (1) sont donc intégrées.

Mais, pour résoudre complétement le problème, il ne suffit pas de connaître p, q, r, il faut encore calculer les valeurs des angles θ, φ, ψ, qui, dans les formules de transformation de coordonnées d'Euler, servent à définir la position des axes principaux d'inertie par rapport à trois axes fixes passant au point fixe. On démontre dans les Traités de Mécanique que l'on a

$$(3) \qquad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Prenons le plan du maximum des aires, ou plan invariable, pour plan des xy. On sait que Ap, Bq, Cr sont les moments des quantités de mouvement relatives aux axes principaux. Si donc on désigne par G la constante des aires $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$, on aura

$$Ap = G\cos(z, A), \quad Bq = G\cos(z, B), \quad Cr = G\cos(z, C),$$

ou bien

$$(4) \qquad \begin{cases} Ap = G \sin\theta \sin\varphi, \\ Bq = G \sin\theta \cos\varphi, \\ Cr = G \cos\theta. \end{cases}$$

yen de k et

SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION AUTOr ... il reste à cal-

Les équations du mouvement d' ... rmules (3), éli-

présente un point fixe et qui n'

force extérieure sont, comm

(1) $$\left\{ \begin{array}{l} A\frac{dp}{dt} = \quad \ldots \sin\theta \frac{d\psi}{dt} \\ B \ldots \quad \frac{\ldots + q\cos\varphi}{\sin\theta} dt. \end{array} \right.$$

de là, au moyen des formules (4),

A, B, C s

tifs au poi

tation i

au mê

L'

en

l'

$$d\psi = G\frac{Ap^2 + Bq^2}{G^2 - C^2r^2}dt = G\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}dt,$$

ou enfin

$$d\psi = G\frac{A\alpha^2 \,\mathrm{cn}^2 gt + B\beta^2 \,\mathrm{sn}^2 gt}{A^2\alpha^2 \,\mathrm{cn}^2 gt + B^2\beta^2 \,\mathrm{sn}^2 gt}dt.$$

Posons, pour abréger

$$gt = x;$$

nous aurons alors

$$d\psi = \frac{G}{g}\frac{A\alpha^2 \,\mathrm{cn}^2 x + B\beta^2 \,\mathrm{sn}^2 x}{A^2\alpha^2 \,\mathrm{cn}^2 x + B^2\beta^2 \,\mathrm{sn}^2 x}dx.$$

Remplaçons $\mathrm{cn}^2 x$ par $1 - \mathrm{sn}^2 x$, et α, β, γ par leurs valeurs (a); nous aurons

$$d\psi = \frac{G}{g}\frac{B - C + (A - B)\,\mathrm{sn}^2 x}{A(B - C) + C(A - B)\,\mathrm{sn}^2 x}dx.$$

Posons

(7) $$\sqrt{\frac{A}{C}\frac{B - C}{A - B}} = \sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\sqrt{-1}\,a,$$

et a sera réel, puisque $\mathrm{sn}\,a$ est une fonction impaire;

s alors

$$= \frac{G}{gC} \frac{\frac{B - C}{A - B} + \operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a\sqrt{-1}}\, dx,$$

$$d\psi = \frac{G}{gC} \frac{\operatorname{sn}^2 x - \frac{C}{A}\operatorname{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a\sqrt{-1}}\, dx,$$

que l'on peut écrire

$$(8) \qquad \psi = \frac{G}{gCA} \int \frac{A \operatorname{sn}^2 x - C \operatorname{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a\sqrt{-1}}\, dx.$$

Désignons par $F(x)$ la quantité placée sous le signe $\int$, en sorte que

$$\psi = \frac{G}{g\,AC} \int F(x)\, dx.$$

Nous allons, pour pouvoir intégrer, décomposer $F(x)$ en éléments simples, par la méthode de M. Hermite. Nous désignerons par Γ l'intégrale de

$$F(z)\, \frac{H'(z - x)}{H(z - x)} = f(z),$$

prise le long d'un parallélogramme de côtés $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$ (périodes des fonctions elliptiques). Cette quantité Γ est indépendante de x; elle est égale à la somme des résidus de la fonction $f(z)$ pris à l'intérieur du parallélogramme en question. Si l'on suppose que ce parallélogramme contienne le point x, le résidu relatif à ce point sera $F(x)$; quant aux résidus relatifs aux autres infinis $a\sqrt{-1}$ et $-a\sqrt{-1}$, ils sont de la forme

$$\frac{H'(a\sqrt{-1} - x)}{H(a\sqrt{-1} - x)},$$

multipliée par la limite de

$$\frac{(x - a\sqrt{-1})(A\,\mathrm{sn}^2 x - C\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1})}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}$$

pour $x = a\sqrt{-1}$; or cette limite est

$$\frac{(A - C)\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{2\,\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}'\,a\sqrt{-1}} \text{ ou } \frac{(A - C)\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{2\,\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}};$$

ainsi donc on a

$$\begin{aligned} \Gamma = {} & \frac{A\,\mathrm{sn}^2 x - C\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}} \\ & + \frac{1}{2}\frac{H'(a\sqrt{-1} - x)}{H(a\sqrt{-1} - x)}\,\frac{(A - C)\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \\ & + \frac{1}{2}\frac{H'(a\sqrt{-1} + x)}{H(a\sqrt{-1} + x)}\,\frac{(A - C)\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{A\,\mathrm{sn}^2 x - C\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}} \\ &= \Gamma - \frac{1}{2}\frac{(A - C)\,\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}}{\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \\ &\quad \times \left[\frac{H'(a\sqrt{-1} + x)}{H(a\sqrt{-1} + x)} + \frac{H'(a\sqrt{-1} - x)}{H(a\sqrt{-1} - x)}\right]. \end{aligned}$$

Substituant cette valeur dans (8), on a

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \psi = {} & \frac{G\Gamma}{gAC}x + \frac{1}{2}\frac{G(A - C)}{gAC}\,\frac{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}}{\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \\ & \times \log\frac{H(x - a\sqrt{-1})}{H(x + a\sqrt{-1})}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule se simplifie beaucoup quand on remplace

G par sa valeur. On a

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$
$$= A^2\alpha^2\mathrm{cn}^2x + B^2\beta^2\mathrm{sn}^2x + C^2\gamma^2\mathrm{dn}^2x;$$

si (ce qui est permis, puisque G est constant) on fait $x = 0$, on a

$$G^2 = A^2\alpha^2 + C^2\gamma^2$$

et, en remplaçant α et γ par leurs valeurs (a),

$$G^2 = g^2\frac{ABC}{A-C}\frac{Ak^2(B-C)+C(A-B)}{(A-B)(B-C)};$$

d'un autre côté, si, à l'aide de (7), on calcule $\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}$ et $\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}$, et si alors on forme la quantité

$$\frac{1}{2}\frac{G(A-C)}{gAC}\frac{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}}{\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}},$$

on la trouve, réductions faites, égale à $\frac{\sqrt{-1}}{2}$; il en résulte que la formule (9) se réduit à

$$\psi = \frac{G\Gamma x}{gAC} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{H(x-a\sqrt{-1})}{H(x+a\sqrt{-1})}.$$

On peut introduire, comme l'a fait Jacobi, la fonction Θ à la place de H, en observant qu'à un facteur constant près on a

$$H(x-a\sqrt{-1}) = \Theta(x-a\sqrt{-1}-K'\sqrt{-1})e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}x},$$
$$H(x+a\sqrt{-1}) = \Theta(x+a\sqrt{-1}+K'\sqrt{-1})e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}x}.$$

Si donc on fait $a + K' = \zeta$, on aura, en négligeant une constante,

$$(10)\qquad \psi = \frac{G\Gamma x}{gAC} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})},$$

Rueb, en modifiant des formules données par Legendre, était parvenu par une tout autre voie à ces résultats; Jacobi est allé plus loin en calculant encore les lignes trigonométriques de ψ de manière à revenir, au moyen des formules d'Euler, aux neuf cosinus qui définissent la position du corps. Indiquons rapidement la marche qu'il a suivie.

La formule (10), en ayant égard à (6), devient

$$\psi = \frac{G\Gamma t}{AC} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})};$$

si l'on pose

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})}, \quad \frac{G\Gamma}{AC} = n,$$

on aura

$$\psi = nt + \psi_1,$$

et ψ se composera d'une partie proportionnelle au temps (et l'on pourra appeler la quantité n le moyen mouvement) et d'une partie ψ_1 dont nous allons calculer le sinus et le cosinus. On a

$$e^{\psi_1\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}},$$

et l'on en conclut facilement $\cos\psi_1$ et $\sin\psi_1$. Pour plus de développements, nous renverrons au Mémoire de Jacobi inséré dans ses *Mathematische Werke*, t. XI, p. 139, écrit en français.

MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE.

Prenons pour axe des z la verticale descendante du point de suspension, pour plan des xy le plan horizontal passant par le même point. Soient r la longueur du

pendule, θ sa colatitude, ψ sa longitude : le théorème des forces vives donnera

$$(1) \qquad r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2gr\cos\theta + a,$$

et celui des aires

$$(2) \qquad r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = c.$$

a et c sont deux constantes dont nous allons fixer la valeur. Soient $v_0^2 = 2gh_0$ la vitesse initiale du mobile, h sa hauteur initiale au-dessus du point le plus bas; en faisant $t = 0$ dans (1), nous aurons

$$v_0^2 = 2gr\cos\theta_0 + a,$$

ou

$$2gh_0 = 2gh + a\ ;$$

d'où

$$(3) \qquad a = 2g(h_0 - h).$$

Désignons par μ l'angle que v_0 fait avec l'horizon. En faisant $t = 0$, $\theta = \theta_0$ dans (2), nous aurons

$$r^2\sin^2\theta_0\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = c;$$

mais $r\sin\theta_0\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ est égal à $v_0\cos\mu$ et $r\sin\theta_0$ est égal à $\sqrt{r^2 - h^2}$, on a donc

$$(4) \qquad c = \sqrt{r^2 - h^2}\,v_0\cos\mu = \sqrt{2gh_0(r^2 - h^2)}\cos\mu.$$

Maintenant, entre (1) et (2), éliminons $\frac{d\psi}{dt}$, nous aurons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(2gr\cos\theta + a)\,r^2\sin^2\theta - c^2}{r^4\sin^2\theta}.$$

Si nous posons

$$(6) \qquad r\cos\theta = z,$$

nous aurons

$$(7)\qquad r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (2gz + a)(r^2 - z^2) - c^2$$

ou, en vertu de (3) et (4),

$$r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g[(z + h_0 - h)(r^2 - z^2) - h_0(r^2 - h^2)\cos^2\mu].$$

Si l'on substitue à z, dans le second membre, $-\infty$, $-r$, h, $+r$, on obtient des résultats ayant pour signes $+$, $-$, $+$, $-$; on peut donc poser

$$(8)\qquad r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2g(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma),$$

α, β, γ désignant des quantités réelles dont deux sont comprises entre $-r$ et $+r$, et dont la troisième est négative et moindre que $-r$.

On sait que, pour ramener l'équation (8) à celle qui définit la fonction elliptique, il faut poser $z = \alpha + pu^2$; posons donc

$$(9)\qquad z = \alpha + p\,\mathrm{sn}^2\omega t;$$

nous aurons, au lieu de (8), en écrivant s au lieu de $\mathrm{sn}\,\omega t$ et en désignant par k le module inconnu de $\mathrm{sn}\,\omega t$,

$$\begin{aligned} s^4&(2r^2\omega^2pk^2 + gp^2)\\ &+ s^2[(1 + k^2)\,2r^2\omega^2p + gp(2\alpha - \beta - \gamma)]\\ &\qquad + 2r^2\omega^2p + g(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 0.\end{aligned}$$

Cette formule aura lieu, quel que soit s, si

$$\frac{2r^2}{g}\omega^2k^2 = -p,$$

$$\frac{2r^2}{g}(1 + k^2)\omega^2 = 2\alpha - \beta - \gamma,$$

$$\frac{2r^2}{g}\omega^2p = -(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma).$$

En éliminant ω par division, on en tire

$$\frac{k^2}{1+k^2}=\frac{-p}{2\alpha-\beta-\gamma},\quad \frac{k^2}{1}=\frac{p^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)};$$

d'où, égalant les valeurs de k^2,

$$-p=\frac{p^2+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{2\alpha-\beta-\gamma}.$$

En résolvant par rapport à p, on trouve $-(\alpha-\beta)$ ou $-(\alpha-\gamma)$; alors $k^2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$ ou $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}$. Pour que k soit réel, il faudra que $\alpha-\beta$ et $\alpha-\gamma$ soient de même signe, ce à quoi on arrivera en prenant pour α la racine positive la plus grande. Enfin, pour que k soit moindre que l'unité, on prendra $p=-(\alpha-\beta)$, $k^2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$, et l'on supposera que γ soit la plus petite des racines; alors on aura

(10) $$\omega=\sqrt{\frac{g(\alpha-\gamma)}{2r^2}},\quad k^2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma};$$

la formule (9) donne alors

$$z=\alpha-(\alpha-\beta)\operatorname{sn}^2\omega t,$$

ou bien

$$z=\alpha\operatorname{cn}^2\omega t+\beta\operatorname{sn}^2\omega t,$$

ou, en vertu de (6),

(11) $$r\cos\theta=\alpha\operatorname{cn}^2\omega t+\beta\operatorname{sn}^2\omega t.$$

Maintenant, la formule (2) donne

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{c}{r^2\sin^2\theta},$$

et, en vertu de (11),

$$\begin{aligned}d\psi&=\frac{c\,dt}{r^2-(\alpha\operatorname{cn}^2\omega t+\beta\operatorname{sn}^2\omega t)^2}\\&=\frac{c\,dt}{2r}\left(\frac{1}{r-\alpha\operatorname{cn}^2\omega t-\beta\operatorname{sn}^2\omega t}+\frac{1}{r+\alpha\operatorname{cn}^2\omega t+\beta\operatorname{sn}^2\omega t}\right).\end{aligned}$$

On a donc enfin

$$\frac{2r}{c}(\psi - \psi_0) = \frac{1}{r-\alpha}\int_0^t \frac{dt}{1 + \frac{\alpha-\beta}{r-\alpha}\operatorname{sn}^2\omega t} + \frac{1}{r+\alpha}\int_0^t \frac{dt}{1 - \frac{\alpha-\beta}{r+\alpha}\operatorname{sn}^2\omega t}.$$

Les deux intégrales qui figurent ici sont de seconde espèce; $\frac{2r}{c}(\psi - \psi_0)$ se composera donc d'un terme proportionnel à t et de termes périodiques de la forme

$$\frac{\Theta'(\omega t + \varepsilon)}{\Theta(\omega t + \varepsilon)}.$$

Si donc on imprimait au pendule un mouvement uniforme de rotation convenable, son mouvement relatif serait périodique.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877 (*);

PAR M. L. BOURGUET.

On donne un ellipsoïde et un point A :

1° *Trouver un point* B *tel que, en menant par ce point un plan quelconque* P, *la droite* AB *soit toujours l'un des axes du cône qui a pour sommet le point* A *et pour base la section de l'ellipsoïde par le plan* P;

(*) Cette question se trouve, aux termes près, dans l'*Aperçu historique*, p. 287. CH. B.

2° *Le problème a en général trois solutions : trouver pour quelles positions du point* A *le nombre des solutions devient infini;*

3° *Le point* A *restant fixe, on suppose que l'ellipsoïde se déforme de façon que les trois sections principales conservent les mêmes foyers, et l'on demande le lieu que décrit alors le point* B.

Soit CD une corde de la surface passant par B. Le conjugué B' de B, par rapport à C, D, est sur la bissectrice extérieure de l'angle CAD, perpendiculaire à AB. Donc le plan polaire de B passe par A et est perpendiculaire à AB Cette propriété va nous permettre de déterminer B. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce dernier point, α, β, γ celles de A. Le plan polaire de B est

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1 = 0.$$

La condition que ce plan passe par A et soit perpendiculaire à AB donne

$$\frac{x_1 \alpha}{a^2} + \frac{y_1 \beta}{b^2} + \frac{z_1 \gamma}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x_1 - \alpha}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y_1 - \beta}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z_1 - \gamma}{\frac{z_1}{c^2}} = \lambda.$$

On voit d'abord que B se trouve dans le plan polaire de A. Les deux plans suivant lesquels se coupent les deux surfaces passent par B. Le plan représenté par la première équation coupe les cylindres représentés par les autres, suivant deux coniques ayant une asymptote parallèle, se coupant par conséquent en trois points. Donc à A correspondent en général trois points B.

On tire de ces équations

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\alpha}{a^2 - \lambda}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\beta}{b^2 - \lambda}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{\gamma}{c^2 - \lambda},$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - \lambda} + \frac{\beta^2}{b^2 - \lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Ceci prouve que, si par le point A on fait passer trois surfaces, ayant leurs sections principales homofocales avec les sections principales de la surface donnée, les trois droites AB sont les normales à ces trois surfaces. Les trois droites AB forment donc un angle trirectangle.

Si la surface se déforme de telle sorte que les foyers des sections principales restent fixes, on voit que le point B décrira les trois normales aux surfaces dont nous avons parlé.

λ est complétement déterminé quel que soit A; pour que B devienne indéterminé, il faut donc qu'on ait, par exemple, $a^2 - \lambda = 0$, $\alpha = 0$; alors le lieu du point B est une parallèle à l'axe OX, passant par A.

Note. — Autres solutions de MM. Durranton, Tourrettes et Gambey.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877;

PAR M. COTTEREAU,

Élève du lycée Charlemagne (Institution Massin).

Une droite AB, *de longueur donnée, tourne autour de son milieu* O, *supposé fixe, de façon que les rapports* $\frac{AC}{AD}$, $\frac{BC}{BD}$ *des distances de ses extrémités* A *et* B *à deux*

points fixes C *et* D *soient toujours égaux entre eux; trouver le lieu engendré par cette droite* AB.

En posant $AO = m$, $CO = a$, $DO = b$, $\widehat{COB} = \alpha$, $\widehat{BOD} = \beta$, on a immédiatement

$$\frac{m^2 + a^2 + 2am\cos\alpha}{m^2 + b^2 + 2bm\cos\beta} = \frac{m^2 + a^2 - 2am\cos\alpha}{m^2 + b^2 + 2bm\cos\beta}$$
$$= \frac{m^2 + a^2}{m^2 + b^2} = \frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta}.$$

Le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ est constant, et, par conséquent, la droite AB décrit un plan perpendiculaire au plan AC.

Le lieu de la droite AB serait encore un plan si le point O était un point quelconque de cette droite.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877;

Par M. A. TOURRETTES.

Deux poids P *et* P′ *sont assujettis à se mouvoir sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale; ces deux poids s'attirent proportionnellement à leurs masses et à une puissance connue* k *de leur distance mutuelle : trouver leur position d'équilibre (on négligera les dimensions des deux poids).*

Étudier le même problème en tenant compte du frottement que l'on suppose le même pour les deux plans inclinés.

Il est d'abord évident que les points A et B sont dans un même plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans inclinés; car la direction AB de l'attraction doit

être dans le plan vertical contenant la normale en A et aussi dans le plan vertical contenant la normale en B; par conséquent, ces deux plans verticaux se confondent. Considérons la section ACB, et soient α, β les inclinaisons des deux plans sur l'horizon, m, m' les masses, δ la distance AB, μ la constante de l'attraction et θ l'inclinaison de AB sur l'horizontale du point A, dans la position d'équilibre des deux points.

Les forces qui agissent sur le système sont les poids mg, $m'g'$ et leur attraction mutuelle $\mu mm'\delta^k$. J'exprime que chaque point est en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent :

$$(1)\qquad \begin{cases} g\sin\alpha = \mu m'\delta^k\cos(\alpha-\theta), \\ g\sin\beta = \mu m\,\delta^k\cos(\beta+\theta), \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m'}{m}\,\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\cos(\beta+\theta)}$$

et

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{m\sin\alpha\cos\beta - m'\sin\beta\cos\alpha}{(m+m')\sin\alpha\sin\beta}.$$

Connaissant θ, l'une des équations (1) donnera δ^k, et par suite δ. La première partie est résolue.

Maintenant tenons compte du frottement. On sait que le frottement est proportionnel à la pression normale, et à un coefficient f, qui est ici le même pour les deux plans. La force de frottement agissant sur A sera $fmg\cos\alpha$; celle qui agit sur B sera de même $fm'g\cos\beta$. Comme ces forces exercent leur action en sens inverse du mouvement qui tend à se produire, nous aurons les deux équations d'équilibre

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \mu m'\delta^k\cos(\alpha-\theta),$$
$$g(\sin\beta - f\cos\beta) = \mu m\,\delta^k\cos(\beta+\theta),$$

et, si l'on pose $f = \operatorname{tang}\varphi$, il vient

$$(2)\quad \begin{cases} g\sin(\alpha-\varphi) = \mu\cos\varphi\, m'\delta^k\cos(\alpha-\theta), \\ g\sin(\beta-\varphi) = \mu\cos\varphi\, m\,\delta^k\cos(\beta+\theta), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)} = \frac{m'}{m}\,\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\cos(\beta+\theta)},$$

et, en posant $\alpha-\varphi=\alpha'$, $\beta-\varphi=\beta'$, on trouve

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{m\sin\alpha'\cos\beta' - m'\sin\beta'\cos\alpha'}{(m+m')\sin\alpha'\sin\beta'}.$$

C'est la même formule que dans le premier cas, seulement les plans ont été inclinés de l'angle φ, qui est l'angle du frottement.

Connaissant θ, on n'aura qu'à substituer dans l'une des formules (2) pour avoir δ^k. On déduira, du reste, cette valeur de celle trouvée dans la première partie en remplaçant α, β, μ par α', β' et $\mu\cos\varphi$.

SOLUTION DE LA QUESTION DE LICENCE

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877;

PAR M. A. TOURRETTES.

Étudier le mouvement des deux points pesants m et μ qui s'attirent proportionnellement à leur masse et à leur distance : le point μ est assujetti à rester sur une verticale Oz, et le point m à rester sur un plan horizontal qui tourne uniformément autour de la verticale Oz.

Considérons d'abord le mouvement du point m. En

appelant k le coefficient de l'attraction, on trouve

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - km\mu z$$

ou

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k\mu\left(z + \frac{g}{k\mu}\right) = 0.$$

Posant

$$z' = z + \frac{g}{k\mu},$$

on trouve l'intégrale

$$z = -\frac{g}{k\mu} + \mathrm{A}\cos t\sqrt{k\mu} + \beta\sin t\sqrt{k\mu}.$$

Pour déterminer les constantes, je suppose que, à l'origine du mouvement, $z = h$ et $\frac{dz}{dt} = 0$. On trouve ainsi

$$(1) \qquad z = -\frac{g}{k\mu} + \left(h + \frac{g}{k\mu}\right)\cos t\sqrt{k\mu}$$

et

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{hk\mu + g}{\sqrt{k\mu}}\sin t\sqrt{k\mu}.$$

La vitesse, d'abord négative, devient nulle pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{k\mu}}$. Alors $z = h - \frac{2g}{k\mu}$.

Le mobile remonte ensuite à la hauteur h, et ainsi de suite indéfiniment. La durée d'une oscillation simple est $\frac{\pi}{\sqrt{k\mu}}$.

Je passe maintenant à l'étude du mouvement de μ. Soit OL une droite fixe dans le plan des $x\mathrm{O}y$, et ωt l'angle de $\mathrm{O}x$ avec cette droite. En tenant compte de l'attraction du point m, et appliquant le théorème de

Coriolis, j'ai l'équation

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = - km\mu x + \mu\omega^2 x + 2\mu\omega \frac{dx}{dt};$$

le premier terme du second membre est la composante de l'attraction suivant Ox, le deuxième et le troisième sont les composantes de la force d'entraînement prise en sens contraire, et de la force centrifuge composée.

On aura de même

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = - km\mu y + \mu\omega^2 y - 2\mu\omega \frac{dx}{dt}.$$

En divisant par μ les deux équations, j'aurai à intégrer le système suivant :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} - (\omega^2 - km)x = 0, \\ &\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} - (\omega^2 - km)y = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de y conduit à l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^4 x}{dt^4} + 2(\omega^2 + km)\frac{d^2 x}{dt^2} + (\omega^2 - km)^2 = 0.$$

Pour l'intégrer, je pose l'équation auxiliaire

$$\lambda^4 + 2(\omega^2 + km)\lambda^2 + (\omega^2 - km)^2 = 0,$$

dont les racines sont de la forme

$$\lambda = \pm a\sqrt{-1}, \quad \lambda = \pm b\sqrt{-1}.$$

Par suite, l'intégrale sera

$$(4) \qquad x = A\cos(at + \alpha) + B\cos(bt + \beta),$$

où A, α, B, β sont des constantes arbitraires.

De la deuxième des équations (2) je tire

$$2\omega(\omega^2 - km)y = 2\omega\frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2\frac{dx}{dt};$$

mais la première donne

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\omega\frac{d^2y}{dt^2} - (\omega^2 - km)\frac{dx}{dt} = 0;$$

substituant dans la précédente la valeur de $2\omega\frac{d^2y}{dt^2}$, il vient

$$2\omega(\omega^2 - km)y = \frac{d^3x}{dt^3} + (3\omega^2 + km)\frac{dx}{dt};$$

il n'y a plus qu'à former $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{dx}{dt}$ au moyen de (4). On aura donc

$$(5) \qquad y = A_1\cos(at + \alpha_1) + B_1\cos(bt + \beta_1),$$

où $A_1, \alpha_1, B_1, \beta_1$ sont des constantes, fonctions de celles qui entrent dans l'équation (4), ainsi que de ω, k, m, a, b; de sorte qu'il n'y a en réalité que quatre constantes arbitraires : A, α, B, β. On les déterminera au moyen de la position et de la vitesse initiales du point μ.

Les équations (4) et (5) représentent la trajectoire relative du point μ.

Cette courbe n'a pas de branches infinies; mais on peut se demander si le mouvement est périodique. Il faut que, si l'on obtient le point M pour $t = t_0$, on obtienne ce même point pour $t = t_1$. Or cela exige que

$$at_0 + \alpha - (at_1 + \alpha) = 2n\pi,$$
$$bt_0 + \beta - (bt_1 + \beta) = 2n'\pi,$$

d'où

$$t_1 - t_0 = \frac{2n\pi}{a} = \frac{2n'\pi}{b},$$

ou bien

$$\frac{n}{a} = \frac{n'}{b}.$$

En donnant à n et n' des valeurs de la forme $a\delta$, $b\delta$, où δ est arbitraire, on satisfera à cette condition. Mais il faut, en outre, que $a\delta$, $b\delta$ soient entiers. S'il en est ainsi, ce mouvement sera périodique, et la période sera

$$\frac{2n\pi}{a}.$$

NOTE SUR LA RÉSOLUTION, AU MOYEN DE TABLEAUX GRAPHIQUES, DE CERTAINS PROBLÈMES DE COSMOGRAPHIE ET DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. E. COLLIGNON,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

I.

Proposons-nous de construire un tableau graphique qui fasse connaître, par une simple lecture, les heures du lever et du coucher du Soleil en un point quelconque du globe terrestre et à une époque quelconque de l'année. Les heures cherchées dépendent de la latitude du lieu et de la déclinaison du Soleil à l'époque donnée. Nous résoudrons le problème en faisant abstraction de la dépression de l'horizon sensible, de l'influence de la réfraction des rayons solaires, de la petite variation subie par la déclinaison pendant la journée, et enfin de l'équation du temps.

Soit (*) O le lieu de l'observation; Z le zénith de ce

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

lieu; EON le plan de l'horizon; N le nord vrai; E l'est; S le point où le Soleil se lève; P le pôle boréal du monde.

L'arc PN représente la latitude λ du lieu; l'arc PS, distance du Soleil au pôle, est le complément de la déclinaison D. L'angle ZPS est l'*angle horaire* du lever; nous le représenterons par H. Cet angle est donné, soit par le triangle sphérique ZPS, dans lequel le côté ZS est égal à un quadrant, soit par le triangle PNS, qui est rectangle en N, et où l'angle en P est le supplément de l'angle cherché. On obtient la relation

$$(1) \qquad \tan\lambda \tan D = -\cos H,$$

qui fait connaître l'angle horaire; il n'y a plus qu'à convertir les degrés de cet angle en heures, minutes,... à raison de une heure pour 15 degrés. Le résultat, retranché de douze heures, sera l'heure du lever rapportée au temps vrai; l'heure du coucher sera exprimée par l'angle H lui-même, converti en heures.

Dans la formule (1), les variables λ, D doivent recevoir des signes. Nous admettons qu'elles sont positives quand elles se rapportent à l'hémisphère boréal, et négatives quand elles se rapportent à l'hémisphère austral. On remarquera, d'ailleurs, que le changement de λ en $-\lambda$ équivaut au changement de D en $-$D, de sorte qu'on peut prévoir tous les cas possibles en regardant λ comme positif, sauf à faire varier D entre ses deux limites extrêmes, $-\varphi$ et $+\varphi$, φ désignant l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

L'équation (1) se résout graphiquement par la construction suivante :

Sur une droite quelconque, prenons une longueur OB égale à une unité arbitrairement choisie. Au point B, faisons l'angle OBA $=\lambda$, et élevons au point O une per-

pendiculaire OA sur OB jusqu'à la rencontre du côté BA. La longueur OA sera égale à tangλ. Par le point A, menons une droite AC, qui fasse avec OA un angle OAC = D, à droite de OA si D est positif, à gauche si D est négatif. La droite AC coupe en C le côté BO, prolongé s'il est nécessaire, et l'on a

$$OC = OA \tang D = \tang\lambda \tang D.$$

Pour avoir l'angle H, il suffit donc, puisque OB est l'unité, de décrire du point O comme centre, avec OB pour rayon, une circonférence BB' qui coupera en E la droite CE élevée au point C perpendiculairement à BO. Joignant OE, on aura en BOE l'angle demandé. En effet, OC est, dans le cercle BEB', égal à — cos BOE, et, par conséquent, angle BOE = H. Si D était négatif, le point C serait situé entre les points O et B, et l'angle BOE serait aigu; son cosinus changé de signe serait donc encore égal au produit tangλ tang D, devenu négatif par le changement de signe de tang D.

On voit sur-le-champ qu'il est inutile de tracer la droite BA, et que la construction reste identiquement la même si l'on prend la longueur OA égale à tangλ. Elle reste encore la même si l'on déplace le cercle BEB' d'une quantité quelconque le long de la direction AO, ce qui permettra de faire partir du même point fixe A les droites AO dont les longueurs représentent les latitudes, et les droites AC qui correspondent aux déclinaisons du Soleil. Enfin, en achevant le cercle, on pourra attribuer sa moitié supérieure au lever du Soleil et sa moitié inférieure au coucher, et y marquer les vingt-quatre heures avec leurs subdivisions, de manière à lire l'heure du lever sur une des demi-circonférences, l'heure du coucher sur l'autre. On obtient, en définitive, le tracé suivant :

A, origine fixe des longueurs, AO = tangλ;

MN, droite perpendiculaire à AO, correspondant à une latitude donnée λ;

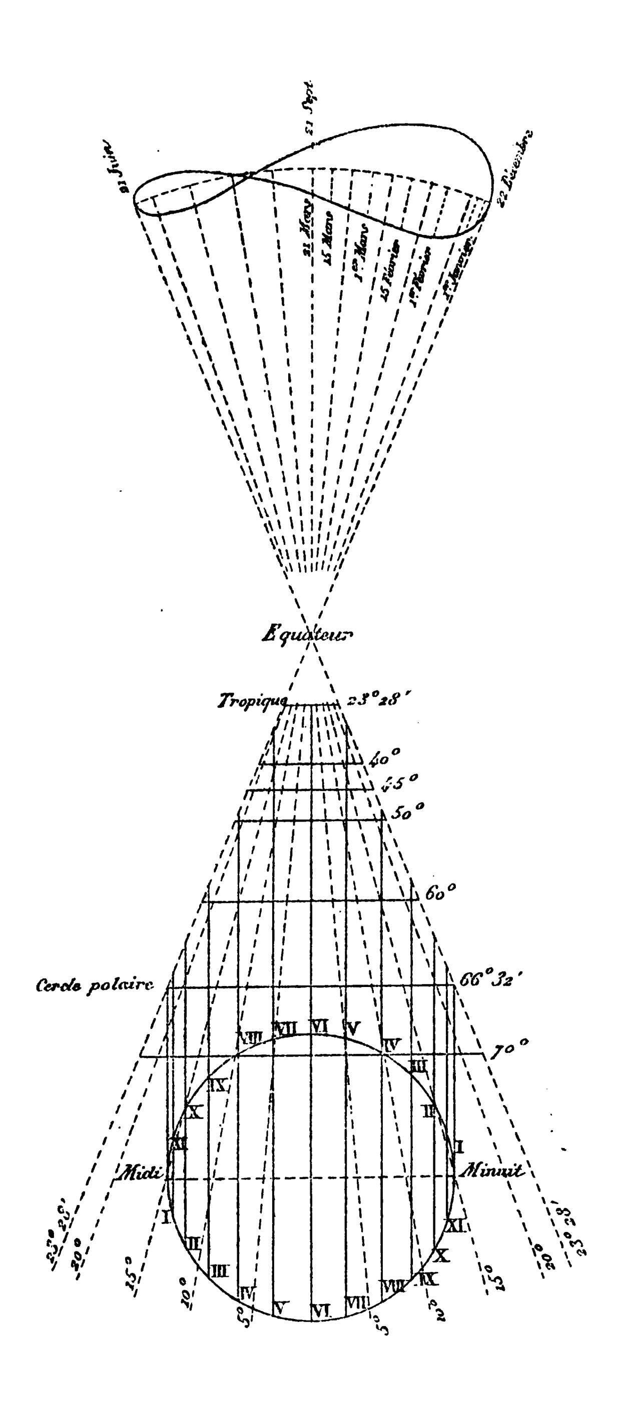
AC, droite issue du point A, et faisant avec OA l'angle D égal à la déclinaison (à droite ou à gauche de AO, suivant que la déclinaison est boréale ou australe);

O′, cercle de rayon égal à l'unité, divisé en vingt-quatre parties égales représentant les vingt-quatre heures; la ligne BB′, *midi-minuit*, est perpendiculaire à la droite AO. Le centre du cercle est situé sur la droite AO prolongée.

La droite CDD′, parallèle à AO, menée par le point C, où se coupent des droites MN et AC qui représentent respectivement la latitude λ et la déclinaison D, rencontre le cercle précédent en deux points E′ et E, qui définissent, l'un l'angle horaire du lever, E′O′B, l'autre l'angle horaire du coucher,, BO′E. Les heures inscrites en E et E′ donnent immédiatement la solution du problème. Cette solution est fournie, comme on le voit, par l'intersection d'un cercle unique tracé une fois pour toutes, avec une droite d'un parallélisme défini, menée par le point commun à deux droites qui dépendent des données λ et D.

On remarquera l'analogie de notre construction avec celle du *Cadran universel des hauteurs,* décrit dans l'*Encyclopédie méthodique*.

Il est aisé de compléter ce Tableau en y faisant paraître un élément que nous avons laissé jusqu'ici de côté, l'*époque de l'année,* qui détermine approximativement la déclinaison du Soleil, et aussi l'*équation du temps,* qui permet de corriger l'heure en la rapportant au midi moyen, au lieu du midi vrai. Du point A, comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un arc de cerele qui sera coupé en divers points par les



21 Juin
21 Sept
22 Décembre
21 Mars
15 Mars
1er Mars
15 Février
1er Février
Equateur
Tropique
23° 28′
40°
45°
50°
60°
Cercle polaire
66° 32′
70°
Midi
Minuit
VIII VII VI V IV
III
IX
X
II
XI
I
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
23° 28′
20°
15°
10°
5°
5°
10°
15°
20°
23° 28′

rayons correspondant aux déclinaisons. Inscrivons en chacun de ces points le jour de l'année auquel le Soleil a la déclinaison indiquée; puis, portons sur le rayon à partir de l'arc de cercle, dans un sens ou dans l'autre suivant qu'elle est positive ou négative, une quantité proportionnelle à l'équation du temps relative à cette même date, évaluée à une échelle arbitraire. Nous pourrons construire ainsi une courbe continue qui fera connaître à la fois, par les dates inscrites le long du tracé et par les cotes de ses ordonnées successives, l'époque de l'année et l'équation du temps qui correspond à cette époque. Ces résultats ne peuvent être complétement rigoureux, puisque les deux éléments qui y sont donnés varient légèrement d'une année à l'autre.

Les limites du Tableau sont, d'une part, les deux droites menées à droite et à gauche de la ligne moyenne AO, et faisant avec cette droite des angles égaux à l'angle φ de l'équateur et de l'écliptique : elles correspondent aux solstices. En haut, le Tableau se termine au point A, puisque nous excluons les latitudes négatives. Vers le bas, il peut être indéfiniment prolongé, puisque la tangente de 90 degrés est infinie ; nous l'avons arrêté arbitrairement à la latitude de 70 degrés. La latitude du cercle polaire est représentée par une droite dont la portion inscrite dans l'angle des déclinaisons extrêmes est égale au diamètre du cercle des heures. A l'un des solstices le jour n'y dure qu'un instant, à l'autre il dure vingt-quatre heures. Pour les latitudes plus élevées, le Tableau indique clairement que les grandes valeurs absolues de la déclinaison laissent le Soleil au-dessus de l'horizon ou au-dessous pendant les vingt-quatre heures, les points de rencontre E et E' devenant imaginaires. Au pôle, qui correspond à une droite infinie en longueur, en comparaison de laquelle le diamètre du cercle des heures devient négligeable, le

Soleil reste entièrement au-dessus de l'horizon ou entièrement au-dessous, d'un équinoxe à l'autre, époques qui, sur l'épure, correspondent à la droite moyenne AO. Rien n'est plus facile que de déterminer de même, d'après la courbe des époques, les durées du séjour du Soleil au-dessous ou au-dessus de l'horizon, pour un point quelconque de la zone glaciale.

Enfin, ce tableau s'applique seulement aux latitudes positives, c'est-à-dire boréales. On peut s'en servir pour un point de l'hémisphère austral, en changeant à la fois le signe de la latitude et le signe de la déclinaison, ce qui fait connaître les heures rapportées au temps vrai. Mais, pour la correction de ces heures, on aura soin de prendre l'équation du temps qui s'applique à l'*époque vraie,* en observant que la symétrie de la figure par rapport à la ligne moyenne AO ne s'étend pas à la courbe des époques.

Le même Tableau fait connaître aussi les coordonnées géographiques des points du globe pour lesquels le Soleil se lève ou se couche au même instant. Proposons-nous, par exemple, de trouver les points de la Terre pour lesquels le coucher du Soleil a lieu à la même heure que pour Paris, lorsque la déclinaison est de 10 degrés australe.

Soit AC la droite qui correspond à la déclinaison 10 degrés australe, CO l'horizontale qui correspond à la latitude de Paris. L'heure marquée en E sera l'heure du coucher du Soleil à Paris. Au même jour, le Soleil se couche à l'heure E_1 pour la latitude O_1C_1, à l'heure E_2 pour la latitude O_2C_2 (heure des localités), et ces heures correspondent au même instant, s'il y a entre les points où on les observe et Paris des différences de longitude égales aux angles $E_1O'E$, $E_2O'E$. Il suffit donc pour résoudre le problème d'associer aux latitudes rencontrées par la droite AC les longitudes représentées dans le

cercle par les angles au centre correspondant aux arcs horaires. Les angles comptés en arrière de O'E correspondent aux longitudes occidentales, les angles comptés dans le sens des heures correspondent aux longitudes à l'est du méridien auquel on rapporte le temps. Le cercle des heures permet donc d'introduire dans le problème la considération des longitudes.

II.

Un abaque analogue, que nous avons construit, fait connaître à vue l'*angle azimutal* NOS, compris entre le nord et le point de l'horizon où le Soleil se lève, angle qu'on appelle parfois l'*amplitude ortive* du Soleil et qui est égal, si l'on néglige la variation diurne de la déclinaison, à l'angle azimutal compris entre le nord et le coucher, c'est-à-dire à l'*amplitude occase*.

Cet angle ω est donné par le triangle rectangle PNS; on a, en effet,

$$\cos PS = \cos PN \cos NS,$$

ou bien

$$\sin D = \cos\lambda \cos\omega. \tag{2}$$

Posons

$$x = \cos\omega, \quad y = \sin D;$$

il viendra

$$y = x\cos\lambda,$$

équation qui représente en coordonnées rectangles une série de droites passant toutes par l'origine et dont les coefficients angulaires sont égaux aux cosinus de la latitude. Ayant tracé ces droites pour différentes valeurs de λ, on les coupera par une série de parallèles à l'axe des x, ayant pour ordonnées le sinus de la déclinaison. Le point d'intersection d'une droite du premier système avec une droite du second aura pour abscisse le cosinus de l'angle ω; et l'on pourra, par conséquent, lire la valeur

de cet angle, si l'on a soin de graduer l'axe des abscisses suivant la loi exprimée par l'équation $x = \cos\omega$ et d'y inscrire les valeurs de l'angle ω, et non celles de l'abscisse x. L'axe des y sera gradué suivant la loi $y = \sin D$, en donnant à D des valeurs positives ou négatives, comprises entre ces deux limites extrêmes. Enfin chaque droite passant par l'origine porte une cote qui fait connaître la latitude correspondante.

Le même Tableau graphique, prolongé et complété, peut servir à résoudre à vue tout triangle sphérique rectangle. On obtient ainsi le Tableau n° 3.

Soit ABC un triangle rectangle en A ; soient a l'hypoténuse, b et c les côtés de l'angle droit, B et C les angles opposés. On aura, entre ces divers éléments, les deux équations principales

$$\cos a = \cos b \cos c,$$
$$\sin b = \sin a \sin B;$$

et si l'on parvient à tracer deux séries de lignes qui correspondent l'une au paramètre c, l'autre au paramètre B, les coordonnées dépendant des arguments a et b, on aura construit un Tableau graphique qui liera ensemble ces quatre éléments, et qui permettra de résoudre à vue le triangle, quelles que soient les données. Nous ferons pour cela, comme tout à l'heure,

$$x = \cos b,$$
$$y = \cos a,$$

et il viendra

$$y = x \cos c,$$

équation de droites passant par l'origine et représentant les lignes c,

$$\sqrt{1 - x^2} = \pm \sin B \sqrt{1 - y^2},$$

ou

$$1 - x^2 = = \sin^2 B (1 - y^2),$$

équation d'hyperboles qui passent toutes par les points du plan $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, et qui correspondent chacune à une valeur de l'angle B. Si, dans cette dernière équation, on fait $y = 0$, il vient

$$x^2 = 1 - \sin^2 B = \cos^2 B.$$

Donc $x = \pm \cos B$. Chaque hyperbole coupe donc l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est le cosinus de l'angle cherché. Or l'axe des x est déjà gradué suivant la loi $x = \cos b$. L'arc inscrit en chaque point de l'axe représente donc un angle, et, par conséquent, le point d'intersection de chaque hyperbole avec l'axe des abscisses donne l'angle B qui définit la courbe.

Mais on pourrait aussi se passer de ces courbes, en observant que l'équation

$$\sin b = \sin a \sin B$$

équivaut à celle-ci

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right),$$

de sorte que les arcs $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - B$ forment un triangle rectangle dont $\frac{\pi}{2} - b$ est l'hypoténuse. La relation entre les trois éléments a, b, B est donc donnée par le même diagramme que celle qui lie les éléments a, b, c, moyennant qu'on remplace respectivement a, b, c par

$$\frac{\pi}{2} - b, \frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} - B.$$

On pourrait construire de même une série de courbes donnant les valeurs de l'angle C, compris entre les côtés a et c.

En attribuant à cet angle différentes valeurs succes-

sives, on aurait entre x et y une équation du quatrième degré; mais ce tracé surchargerait trop l'épure. Après avoir considéré dans le triangle les côtés et les angles pris dans l'ordre a, B, c, b, C, on peut aussi bien les prendre dans l'ordre inverse a, C, b, c, B, et permuter B en C, C en B, b en c, c en b. Alors $\cos x$ devient l'abscisse, $\cos b$ le coefficient angulaire des droites issues de l'origine, $\cos a$ reste l'ordonnée, et les hyperboles, qui tout à l'heure correspondaient aux angles B, correspondent maintenant aux angles C. Il n'y aura donc de difficulté que pour le problème où l'on donnerait les deux angles B et C, qui seraient représentés tous les deux par des courbes du même système. Le Tableau servira encore à résoudre le triangle, mais à l'aide d'un tâtonnement.

Soient NB, NC les hyperboles qui correspondent aux angles donnés C et B. Si l'on mène arbitrairement une droite horizontale, correspondant à une valeur de l'hypoténuse a, cette droite coupe les deux hyperboles en des points P et Q. La droite OP prolongée coupe MN en un point L; la droite QR, abaissée perpendiculairement sur OM, coupe l'axe des abscisses en un point R. Or les deux segments OR, ML représentent tous les deux le cosinus du même côté; ils doivent donc être égaux, et la droite (a) doit être telle qu'on ait ML = OR. Les droites OL, QR étant tracées en grand nombre sur le Tableau, il sera facile de déterminer par quelques essais la position de la droite (a), qui assure cette égalité des deux segments.

Remarquons, en finissant, que le triangle plan OMN, partagé par les lignes issues du point O, peut être regardé comme la carte, dans un système particulier de tracé, d'un triangle sphérique trirectangle *omn*. Le point O correspond au pôle *o*, pris en l'un des sommets.

Le côté MN est l'équateur, et les rayons issus du point O sont les méridiens. Les droites perpendiculaires à OM représentent les parallèles LL'. Si l'on désigne par λ la latitude *pl* d'un point *p*, et par L sa longitude, comptée à partir du côté *om* pris pour premier méridien, on aura, dans le triangle *mpl*, rectangle en *l*,

$$\text{l'hypoténuse } mp = a, \quad ml = c = \text{L}, \quad pl = b = \lambda,$$

et la relation

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Les formules de transformation seront

$$x = \cos b = \cos\lambda,$$
$$y = \cos a = \cos\lambda \cos \text{L}.$$

L'hypoténuse *a* donne la distance sphérique du point *p* au point *m* de l'équateur, et les angles B, donnés par les hyperboles, sont les angles *pml* formés par cette distance sphérique avec l'équateur. On reconnaît les deux éléments nécessaires au *tracé central d'égale superficie*, qui a pour centre un point *m* pris sur l'équateur.

Le même Tableau permet aussi de résoudre à vue la question qui consiste à trouver la distance de deux points sur la sphère, connaissant les latitudes et les longitudes de ces deux points.

Soient λ, λ' les latitudes données, L la différence des longitudes données, et Δ la distance cherchée; on aura

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \sin\lambda \sin\lambda' + \cos\lambda \cos\lambda' \cos \text{L} \\ &= \sin\lambda(\sin\lambda' + \cot\lambda \cos\lambda' \cos \text{L}).\end{aligned}$$

Appelons φ un arc auxiliaire donné par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi = \cot\lambda \cos \text{L},$$

il viendra

$$\cos\Delta = \sin\lambda\left(\sin\lambda' + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\lambda'\right) = \frac{\sin\lambda \sin(\lambda' + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Cela posé, considérons trois triangles rectangles, savoir :

1° Un triangle ayant pour côtés de l'angle droit les arcs φ et $90° - L$; l'angle opposé au côté φ sera égal à $90° - \lambda$, car on a

$$\tang \varphi = \sin(90° - L)\tang(90° - \lambda),$$

en vertu de la relation qui définit l'arc auxiliaire. Ce premier triangle, où l'on connaît le côté $90° - L$ et l'angle adjacent $90° - \lambda$, fait donc connaître le côté φ, que l'on trouve sur le Tableau graphique.

2° Un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $90° - \lambda$ et $90° - \lambda' - \varphi$. Si l'on appelle x son hypoténuse, on aura

$$\cos x = \cos(90° - \lambda)\cos(90° - \lambda' - \varphi) = \sin\lambda \sin(\lambda' + \varphi).$$

Le côté x sera donc encore facile à trouver sur le Tableau.

3° Imaginons un troisième triangle rectangle ayant pour hypoténuse x, et φ pour l'un des côtés de l'angle droit. L'autre côté sera égal à la distance cherchée Δ, car son cosinus sera égal à $\frac{\cos x}{\cos \varphi}$ ou à

$$\frac{\sin\lambda \sin(\lambda' + \varphi)}{\cos\varphi} = \cos\Delta.$$

Le Tableau résout donc le problème, en introduisant deux auxiliaires, φ et x. Ces opérations successives sont résumées dans le Tableau symbolique suivant :

Quantités données.		Quantités cherchées.
$c = 90° - L$	$B = 90° - \lambda$	$b = \varphi$
$b = 90° - \lambda$	$c = 90° - \lambda' - \varphi$	$a = x$
$a = x$	$b = \varphi$	$c = \Delta$

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Sulla risoluzione delle congruenze numeriche, e sulle tavole che danno i logaritmi (indici) degli interi rispetto ai vari moduli; Memoria del prof. *G. Bellavitis*. Extrait des *Transunti della reale Accademia dei Lincei;* 1877.

Prima, seconda, terza ed ultima parte della quattordicesima Rivista di Giornali del prof. *G. Bellavitis*. Extrait du t. VI, série V, des *Atti del R. Istituto veneto*.

Applications mécaniques du Calcul des quaternions. — Sur un nouveau mode de transformation des courbes et des surfaces; par M. *Laisant*. In-4°. Prix : 5 francs. — Paris, Gauthier-Villars; 1877.

Sur la théorie des équations algébriques. — Sur la théorie des surfaces; par M. *A.-E. Pellet*. In-4° — Clermont-Ferrand, F. Thibaud; 1878.

QUESTIONS.

1309. On donne deux coniques A, B et un point S dans un plan. Par ce dernier on tire une ligne quelconque, et l'on prend son pôle a par rapport à la conique A. On joint Sa et l'on prend son pôle b par rapport à B; on tire Sb et l'on prend son pôle a_1 par rapport à A, et ainsi de suite indéfiniment. Démontrer que :

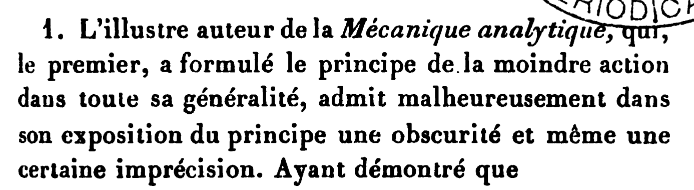
1° Quatre droites consécutives quelconques des faisceaux S, a, a_1, a_2, ... et S, b, b_1, b_2, ... ont des rapports anharmoniques constants;

2° Donner l'expression d'un de ces rapports;

3° Si ce procédé est épuisé à la cinquième ligne, en d'autres termes, si Sb_1 coïncide avec la première ligne arbitraire issue du point S, les quatre tangentes menées par S aux deux coniques forment un faisceau harmonique. (C. de Polignac.)

NOTE SUR LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION;

Par M. Th. SLOUDSKY,
Professeur à l'Université de Moscou.



1. L'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, qui, le premier, a formulé le principe de la moindre action dans toute sa généralité, admit malheureusement dans son exposition du principe une obscurité et même une certaine imprécision. Ayant démontré que

$$\delta . \mathrm{Sm}\int u\,ds = 0 \ (^*),$$

il n'a pas indiqué quels sont les mouvements comparés. Ayant différentié, par rapport à la caractéristique δ, l'équation des forces vives et, par conséquent, assujetti tous les mouvements comparés à la condition

$$\mathrm{S}\left(\frac{u^2}{2}+\Pi\right)\mathrm{m} = \mathrm{H},$$

il n'a pas fait attention à ladite condition, ni en formulant le principe même, ni en déduisant de ce principe les équations du mouvement. Cette omission, peu grave en elle-même, mena cependant à des méprises. Grâce à cela, plusieurs éminents géomètres de l'Europe, tels que Jacobi en Allemagne et Ostrogradsky en Russie, n'ont pas compris le principe de la moindre action, tel qu'il est exprimé par Lagrange; ils le trouvèrent inexact et le remplacèrent par leurs propres théorèmes. C'est aussi grâce à cela que, jusqu'à présent, il ne s'est pas formé parmi les géomètres une idée nette du principe en question.

(*) *Mécanique analytique*, 3e édition, t. I, p. 274 et suiv.

Contribuer à éclairer le sens de ce principe, tel est le but de la présente Note.

2. En approfondissant l'analyse de Lagrange, il n'est pas difficile de reconnaître le sens du théorème que le célèbre géomètre français a nommé le *principe de la moindre action*. On voit par cette analyse qu'outre les liaisons du système tous les mouvements comparés sont sujets à ces deux conditions : 1° les positions initiales et finales du système doivent être les mêmes dans tous les mouvements comparés ; 2° les coordonnées des points du système doivent satisfaire à l'équation

$$S\left(\frac{u^2}{2}+\Pi\right)m = H, \tag{1}$$

Π étant une certaine fonction des coordonnées, et H une constante donnée.

A ces conditions $\delta.\mathrm{S}m\int u\,ds = 0$ pour celui des mouvements qui a Π pour fonction des forces.

Pour les autres mouvements comparés, Π ne doit et ne peut être fonction des forces : ils doivent avoir lieu sous l'action d'autres forces motrices.

De ce que tous les mouvements comparés sont sujets à la condition

$$S\left(\frac{u^2}{2}+\Pi\right)m = H,$$

il ne s'ensuit nullement qu'ils doivent avoir lieu sous l'action des mêmes forces motrices. L'équation (1) n'est l'équation des forces vives que pour celui des mouvements pour lequel $\delta.\mathrm{S}m\int u\,ds = 0$.

Bien entendu, la variation des forces motrices peut être remplacée par l'introduction des nouvelles *forces des liaisons*. Avec ces dernières, les mouvements com-

parés peuvent avoir lieu sous l'action des mêmes forces motrices.

Voici le peu qui doit être ajouté à l'exposition du principe de la moindre action, faite par Lagrange, pour lui donner la clarté et la précision qui lui manquent.

Pour ce qui concerne l'omission mentionnée, que Lagrange avait faite en déduisant les équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action, elle a été suggérée encore en 1814 par O. Rodrigues, dans sa Note remarquable, mais malheureusement peu connue : *De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement rapportées aux variables indépendantes* (*).

3. Pour mieux éclaircir ce qui est dit, prenons un exemple.

Représentons-nous un mouvement parabolique d'un point pesant, lancé dans une direction faisant un angle φ avec l'horizon. Supposons que la masse du point soit égale à l'unité, sa vitesse initiale v_0 très-grande, et l'angle φ très-petit. Ce mouvement diffère d'abord bien peu du mouvement uniforme, suivant une droite horizontale avec la vitesse v_0. Supposons que les deux mouvements s'effectuent dans le plan xz. Les équations du premier mouvement seront

$$x = v_0 t \cos\varphi, \quad z = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2};$$

celles du second,

$$x = v_0 t, \quad z = 0.$$

La fonction des forces pour le premier mouvement sera $-gz$; pour le second elle sera zéro.

(*) *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. III.

L'équation

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

sera satisfaite par ces deux mouvements.

Comparons les deux mouvements entre les points d'intersection des trajectoires. Comparons les intégrales

$$\int_0^{t_1} \mathrm{T}\,dt.$$

Dans le premier mouvement,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(v_0^2 - 2v_0 gt \sin\varphi + g^2 t^2),$$

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g},$$

$$\int_0^{t_1} \mathrm{T}\,dt = \frac{v_0^3 \sin\varphi}{g}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\varphi\right);$$

dans le second,

$$\mathrm{T} = \frac{v_0^2}{2}, \quad t_1 = \frac{2v_0 \sin\varphi \cos\varphi}{g},$$

$$\int^{t_1} \mathrm{T}\,dt = \frac{v_0^3 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^3 \sin\varphi}{g}\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{v_0^3 \sin\varphi}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\sin^4\varphi - \ldots\right).$$

Ainsi, tant que l'angle φ est petit, l'intégrale $\int_0^{t_1} \mathrm{T}\,dt$ est plus petite dans le premier mouvement que dans le second.

4. Le célèbre Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, professées en 1842-43 à Königsberg et éditées en 1866 par Clebsch, s'exprime ainsi, en parlant du principe de la moindre action, p. 44 : « Dies Princip wird fast in allen Lehrbüchern, auch in den besten, in denen von Poisson, Lagrange und Laplace, so dargestellt, dass

es nach meiner Ansicht nicht zu verstehen ist. Es wird nämlich gesagt, es soll das Integral

$$\int \Sigma m_i v_i ds_i$$

(worin $v_i = \frac{ds_i}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes m_i bezeichnet) ein Minimum sein, wenn man das Integral von einer Position des Systems zu andern ausdehne. Es wird dabei gesagt, dieser Satz gelte nur, so lange der Satz der lebendigen Kräfte gelte, aber es wird zu sagen vergessen, dass man durch den Satz der lebendigen Kraft die Zeit aus obigem Integral eliminirt und alles auf Raumelemente reducirt annehmen müsse. Das Minimum des obigen Integrals ist übrigens so zu verstehen, dass, wenn die Anfangs-und Endpositionen gegeben sind, das Integral unter allen von der einen zur andern Position möglichen Wegen für den wirklich durchlaufenen ein Minimum wird. »

Ayant éliminé de l'intégrale $\int \Sigma m_i v_i ds_i$ le temps t à l'aide de l'équation des forces vives, Jacobi arrive à l'expression juste (wahre Form), d'après son opinion, du principe de la moindre action :

« Sind zwei Positionen des Systems gegeben, und dehnt man das Integral

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

auf die ganze Bahn des Systems von der ersten Position zur zweiten aus, so ist sein Werth für die wirkliche Bahn ein Minimum in Beziehung auf alle mögliche Bahnen, d. h. solche, welche mit den Bedingungen des Systems (wenn es deren gibt) vereinbar sind. Es wird also

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

ein Minimum oder

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}=0. »$$

Certainement on peut éliminer le temps t de l'intégrale $\int\Sigma m_i v_i\, ds_i$ à l'aide de l'équation des forces vives; mais il n'y a aucune nécessité dans cette élimination. Les expressions

$$\delta\int\Sigma m_i v_i\, ds_i=0,$$

les variables étant liées par l'équation

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2=U+h,$$

et

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

sont des expressions tout à fait équivalentes. Pas une seule n'est plus vraie que l'autre. Jacobi a entièrement tort d'affirmer que l'exposition du principe de la moindre action, donnée par Lagrange, est incompréhensible. Il ne l'a pas comprise et il a donné sa propre expression, qui essentiellement ne diffère en rien de celle de Lagrange.

L'exposition du principe de la moindre action faite par Lagrange pèche, comme nous l'avons dit, par une certaine imprécision : l'exposition de Jacobi a le même défaut. Jacobi non plus ne précise pas exactement les mouvements comparés. En assujettissant les mouvements comparés à la condition

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2=U+h,$$

Jacobi suppose, à ce qu'il paraît, qu'ils doivent tous s'effectuer sous l'action des mêmes forces motrices; mais, comme nous le savons déjà, cette limitation n'est pas du tout nécessaire.

5. L'opinion du célèbre géomètre de Königsberg sur l'exposition du principe de la moindre action par Lagrange a été reçue par ses compatriotes sans réplique et sans objection. En parlant du principe en question dans leurs ouvrages, les mathématiciens allemands contemporains ont en vue exclusivement l'expression de ce principe donnée par Jacobi. C'est aussi dans cette forme qu'ils l'exposent dans leurs cours de Mécanique (*). Sans se donner la peine d'approfondir la question, ils prennent la forme de Jacobi pour la seule exacte. Ils voient dans l'*explication* du principe, donnée par Jacobi, un grand pas fait par la Science. Ils traitent avec courroux les géomètres étrangers, qui n'admettent pas ou qui ignorent ce mérite de leur grand compatriote. M. Serret, par exemple, a bien souffert pour ne pas avoir fait attention, dans son excellent *Mémoire sur le principe de la moindre action*, imprimé dans les *Comptes rendus*, t. LXXII et LXXIII, aux travaux de Jacobi et d'autres géomètres allemands. (Voir *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. III, p. 174.)

M. Mayer, prefesseur à l'Université de Leipzig, qui s'occupe de longue date, mais avec peu de succès, du principe de la moindre action, a publié dernièrement sa brochure *Geschichte des Princips der kleinsten Action*. L'étude historique du sujet aurait dû l'amener à une estimation exacte du principe et à l'appréciation juste du mérite de Lagrange. Mais M. Mayer ne s'est pas donné la peine de bien étudier la littérature de la question. En imitant Jacobi, il dit que le principe de la moindre ac-

---

(*) Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*.

Dans la même forme on expose le principe de la moindre action dans quelques nouveaux cours français de Mécanique, par exemple, dans le *Traité de Mécanique rationnelle* par Laurent.

tion, tel qu'il est exposé par Lagrange, n'a aucun sens. Tâchant de l'expliquer, il arrive à la conclusion que c'est le principe d'Hamilton qui est exprimé par le théorème de Lagrange.

6. L'expression du principe de la moindre action, donnée par Lagrange, a été blâmée, comme nous l'avons déjà dit, non-seulement par Jacobi, mais encore par Ostrogradsky. Dans son *Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 6e série, Sciences mathématiques et physiques, t. IV) et dans sa lettre à Braschmann, publiée dans le premier volume du *Journal de la Société Philomathique de Moscou*, Ostrogradsky déclare que l'analyse de l'article 40 (3e section, 2e Partie, t. I) de la *Mécanique analytique* est inexacte, et que le principe de la moindre action doit être exprimé par l'équation

$$\delta \int (\Pi + \mathrm{T})\, dt = 0,$$

c'est-à-dire que ce principe est celui d'Hamilton.

L'opinion d'Ostrogradsky a trouvé des défenseurs dans la littérature mathématique russe, tels que Braschmann, Rachmaninoff; mais elle a eu aussi des adversaires, Sloudsky, Sokoloff, Somoff. La controverse ainsi levée a fini au profit de Lagrange. Il a été démontré que son analyse n'a point de fautes et que son théorème est essentiellement différent du principe d'Hamilton.

LIGNES DE COURBURE DE LA SURFACE $z = L\cos y - L\cos x$;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

M. Tisserand a étudié, dans ses *Exercices sur le Calcul infinitésimal* (p. 319), les lignes de courbure de la surface A représentée par l'équation

$$z = -L\cos x - L\cos y;$$

on peut faire, entre cette surface et la surface B que je considère, un rapprochement analogue à celui que leur mode de génération établit entre les deux paraboloïdes. Deux séries de droites rectangulaires menées dans le plan des xy parallèlement à OX et à OY, à des distances de ces axes égales à un nombre impair quelconque de fois $\frac{\pi}{2}$, dessinent une sorte d'échiquier indéfini. Or les surfaces A et B sont formées d'une infinité de nappes égales, dont chacune se projette sur le plan des xy à l'intérieur d'une case qui serait de même couleur que la case ayant son centre à l'origine, aucun point ne se projetant dans les autres cases; mais, tandis qu'une nappe de A peut être engendrée par une branche de la courbe $y = 0$, $z = -L\cos x$, se mouvant parallèlement à elle-même de façon que son sommet glisse sur la courbe $x = 0$, $z = -L\cos y$, concave comme la première vers les z positifs, une nappe de B pourra être décrite par la même génératrice, mais en faisant glisser son sommet sur la ligne $x = 0$, $z = L\cos y$, concave vers les z négatifs; la surface B, comme le paraboloïde hyperbolique, aura partout des courbures opposées.

La projection des lignes de courbure de B sur le plan

des xy est donnée par une équation différentielle bien moins simple que pour A; nous effectuerons l'intégration à l'aide d'un procédé avantageux, et la discussion des courbes obtenues pourra offrir de l'intérêt. Il suffit d'appliquer la formule connue qui donne la projection des lignes de courbure d'une surface quelconque pour trouver sans difficulté, dans le cas de la surface B, l'équation

$$\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y (\operatorname{séc}^2 x\, dx^2 + \operatorname{séc}^2 y\, dy^2) - 2 \operatorname{séc}^2 x \operatorname{séc}^2 y\, dx\, dy = 0.$$

Après avoir multiplié cette équation par $\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y$, on peut lui donner la forme

$$\left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right) \frac{\sin^2 x\, dx^2}{\cos^4 x} + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \frac{\sin^2 y\, dy^2}{\cos^4 y} - 2 \frac{\sin x \sin y\, dx\, dy}{\cos^3 x \cos^3 y} = 0.$$

En faisant $\frac{1}{\cos x} = u$, $\frac{1}{\cos y} = v$, on trouve

$$(1) \qquad (u\,dv - v\,du)^2 - (du^2 + dv^2) = 0.$$

Si u et v étaient des coordonnées rectangulaires, cette équation se simplifierait en passant aux coordonnées polaires; je suis donc conduit à poser

$$u = \rho \cos\omega, \quad v = \rho \sin\omega.$$

En effectuant le changement de variables, on déduit de l'équation (1)

$$\rho^4 d\omega^2 - (d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2) = 0,$$

d'où

$$\pm d\omega = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}}\, d\frac{1}{\rho}.$$

Désignant par α une constante arbitraire, j'ai l'inté-

grale

$$\alpha \pm \omega = \arc\cos\frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \cos(\alpha \pm \omega).$$

On se contentera du signe $+$ devant ω, car, en posant $\alpha = 2\pi - \alpha'$, $\cos(\alpha - \omega)$ deviendrait $\cos(\alpha' + \omega)$. Je développe la dernière équation obtenue, je reviens aux variables primitives, et j'ai pour la projection P d'une ligne de courbure quelconque

$$\begin{aligned} 1 &= \rho\cos\omega\cos\alpha - \rho\sin\omega\sin\alpha \\ &= u\cos\alpha - v\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos y}, \end{aligned}$$

d'où

$$\cos y = \frac{\sin\alpha\cos x}{\cos\alpha\cos x} = \mathrm{X}.$$

On cherche comment varie X, par exemple, en construisant la courbe $y_1 = \mathrm{X}$. Soit maintenant ABCD la case de l'échiquier au centre de laquelle est l'origine; nous nous bornerons à la portion de P comprise dans le carré ABCD. Quand α est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, P sera composé de deux branches séparées par OY et aboutissant aux quatre sommets de ABCD; pour les valeurs de α entre π et $\frac{3\pi}{2}$, on a deux branches analogues, mais séparées par OX; elles correspondent aux lignes de courbure du second système; les valeurs de α comprises dans le deuxième ou le quatrième quadrant ne donnent pas de points utiles. Pour les valeurs limites de α, P se réduit aux axes OX et OY ou aux côtés du carré.

Ajoutons que, tandis que A possède une infinité d'ombilics tout le long de ses sections principales, B n'a aucun de ces points.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CERCLE JOUISSANT DE LA PROPRIÉTÉ QUE DE CHACUN DE SES POINTS ON VOIT SOUS UN ANGLE DROIT UNE CONIQUE DONNÉE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Soient K la conique donnée et C le cercle considéré. Désignons par M un point de ce cercle; les deux tangentes menées de ce point à la conique sont à angle droit; par suite, si l'on mène les deux droites isotropes qui se croisent au point M, et si l'on désigne par α et β les points où ces droites rencontrent la polaire de M relativement à la conique, le triangle $M\alpha\beta$ est conjugué par rapport à cette conique.

Considérons un autre triangle ABC conjugué par rapport à K; d'après un beau théorème dû à M. Hesse, on sait que les triangles $M\alpha\beta$ et ABC sont circonscrits à une même conique. Cette conique a, d'ailleurs, pour foyer le point M, puisque les droites $M\alpha$ et $M\beta$ sont isotropes.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un triangle quelconque ABC, *conjugué par rapport à la conique* K, *et étant pris un point quelconque* M *sur le cercle* C, *la conique inscrite dans le triangle* ABC *et ayant pour foyer le point* M *est tangente à la polaire du point* M *relativement à* K.

Autrement :

Si, d'un point M *pris arbitrairement sur le cercle* C, *on mène des perpendiculaires aux côtés d'un triangle quelconque conjugué par rapport à la conique* K, *le cercle passant par les pieds de ces perpendiculaires passe par un point fixe qui est le pied de la perpendi-*

culaire abaissée du point M *sur sa polaire relativement à* K (*).

2. Lorsque la conique K est une parabole, le cercle C se réduit à la directrice de cette parabole. D'ailleurs, la perpendiculaire abaissée d'un point de la directrice sur sa polaire est le foyer de la courbe.

D'où la proposition suivante :

Étant donné un triangle quelconque conjugué par rapport à une parabole, si, d'un point quelconque de la directrice, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle, les trois pieds de ces perpendiculaires sont sur un cercle passant par le foyer de la courbe.

3. Considérons deux points M et M′ situés sur le cercle C, et désignons respectivement par P et P′ leurs polaires relativement à la conique K; soit de plus N le point de rencontre des droites P et P′. D'après ce que j'ai dit plus haut, M et M′ sont les foyers d'une conique tangente aux droites P et P′. Il en résulte, d'après un théorème connu, que les deux droites P et P′ ont même orientation que les droites NM et NM′. D'ailleurs, le cercle C a pour polaire réciproque, par rapport à K, une conique ayant les mêmes foyers que cette conique; c'est une conséquence immédiate de ce fait bien connu que le cercle C passe par les points de contact des droites

(*) Cette propriété se rattache à la suivante, que je me contente de mentionner en passant :

Considérons une série de triangles inscrits dans une même conique et circonscrits à une autre conique, puis d'un point fixe M *abaissons des perpendiculaires sur les côtés de chacun de ces triangles. Les divers cercles passant par les pieds de ces perpendiculaires coupent orthogonalement un cercle fixe, tandis que leurs centres décrivent une conique.*

isotropes tangentes à K. Par suite, les droites P et P′ étant tangentes à cette conique homofocale à K, ces deux droites ont la même orientation que les tangentes menées du point N à K. Si l'on remarque maintenant que la droite joignant les points de contact de ces tangentes est la droite MM′ polaire du point N relativement à K, on obtiendra le théorème suivant :

Étant donné un point quelconque du plan N, *sa polaire, par rapport à la conique* K, *coupe cette courbe en deux points* Q, Q′, *et le cercle* C *en deux points* M et M′; *les angles* QNQ′ *et* MQM′ *ont mêmes bissectrices.*

Lorsque la conique est une parabole, la proposition peut s'énoncer de la façon suivante :

Si, d'un point quelconque N *du plan, on mène deux tangentes à une parabole, et si l'on désigne par* A et B *leurs points de contact, par* T *le point où la corde des contacts* AB *rencontre la directrice de la courbe, les bissectrices de l'angle formé par les droites* TN *et* TA *sont parallèles aux bissectrices de l'angle* ATB.

SUR LA COURBE ENVELOPPÉE PAR LES AXES DES CONIQUES QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS DONNÉS ET SUR LES AXES DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE QUI PASSENT PAR CINQ POINTS DONNÉS. SUR LES LIGNES SPIRIQUES;

Par M. LAGUERRE.

I.

1. La courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés est, comme on le

sait, une courbe du quatrième degré et de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini. L'équation d'une telle courbe ne renferme que six constantes arbitraires et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de façons différentes comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Je me propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui permettent le mode de génération indiqué.

2. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai fait connaître depuis longtemps dans les *Nouvelles Annales*:

Étant donnés sur une conique deux points fixes A *et* B *et un point* M *mobile sur cette conique, si, aux points milieux des cordes* AM *et* BM, *on élève des perpendiculaires à ces cordes, le segment, intercepté sur l'un quelconque des axes de la conique par ces perpendiculaires, demeure constant quand le point* M *se meut sur la courbe.*

Supposons que le point M vienne successivement coïncider avec deux points donnés C et D de la conique; on aura la proposition suivante :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, aux points milieux des cordes* AC, BC, AD *et* BD, *élevons des perpendiculaires à ces cordes et désignons respectivement par* A′, B′, A″ *et* B″ *ces perpendiculaires; cela posé, les segments, interceptés sur l'un quelconque des axes de la conique par les perpendiculaires* A′ *et* B′ *d'une part et par les perpendiculaires* A″ *et* B″ *d'autre part, sont égaux entre eux.*

Il est clair que, le quadrangle ABCD étant donné, on pourrait considérer d'autres cordes que celles que je viens de considérer et qui donneraient lieu à des propositions semblables. En examinant cette question, on voit facilement que ces propositions sont contenues dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, désignons par* α, β, γ *et* δ *les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec trois quelconques de ces sommets. Cela posé, les trois couples de côtés opposés du quadrangle formé par les points* α, β, γ *et* δ *interceptent, sur l'un quelconque des axes de la conique, trois segments dont le point milieu est le même.*

3. On sait, par le théorème de Desargues, que généralement les six côtés d'un quadrangle sont coupés par une droite quelconque en six points en involution; on voit ici que les six côtés du quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ sont coupés, par un axe quelconque d'une des coniques passant par les quatre points A, B, C et D, en six points formant une involution dont un des points doubles est rejeté à l'infini.

Imaginons les deux coniques circonscrites au quadrangle ABCD et tangentes à cet axe; leurs points de contact avec cette droite sont précisément les deux points doubles de l'involution dont je viens de parler; l'une de ces coniques est donc asymptote de l'axe.

En d'autres termes :

Un axe quelconque d'une conique circonscrite au quadrangle ABCD est une asymptote d'une conique circonscrite au quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$.

4. Pour abréger le discours, étant donné un quadrangle

quelconque ABCD, je désignerai sous le nom de *quadrangle dérivé* le quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB.

On peut donc dire que :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé.

5. Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrangle donné et K la courbe enveloppée par les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle.

Une telle courbe peut être engendrée de cette façon d'une infinité de manières. Considérons, en effet, une quelconque des coniques circonscrites au quadrangle et soient D et D' ses deux asymptotes; nous dirons que ces deux droites sont deux tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, on sait (*) que, si l'on considère deux couples quelconques de tangentes conjuguées, ces deux couples se rencontrent en quatre points formant un quadrangle Q et que les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle enveloppent la courbe K.

Si donc on construit le quadrangle Q' ayant pour dérivé le quadrangle Q, les axes des coniques circonscrites à Q' envelopperont la courbe K, et l'on obtiendra toutes les façons semblables d'engendrer cette courbe en considérant tous les quadrangles qui ont pour dérivés les divers quadrangles Q.

6. La projection orthogonale d'une courbe K, sur un

(*) Voir Steiner, *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse und vierten Grades* (*Journal de Crelle*, t. LIII, p. 231) et Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Ibid.*, t. LXIV, p. 101).

plan quelconque, est évidemment une courbe de la même espèce.

Soient A, B, C et D quatre points donnés et K l'enveloppe des axes des coniques passant par ces points; désignons par K′ la projection de cette courbe sur un plan P, cette projection peut être considérée comme l'enveloppe des axes des coniques passant par quatre points A′, B′, C′ et D′ que l'on construira de la façon suivante.

Dans le plan du quadrangle ABCD, imaginons le quadrangle dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$ et projetons ce dernier quadrangle sur le plan P; soit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ cette projection. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut, que les points cherchés A′, B′, C′ et D′ seront les sommets du quadrangle qui a pour dérivé $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

7. Il peut être utile dans certains cas de construire le quadrangle qui a pour dérivé un quadrangle donné $\alpha\beta\gamma\delta$.

Soient A, B, C et D les sommets du quadrangle cherché; en sorte que α désigne, par exemple, le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, β le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, etc.

On voit immédiatement que le symétrique du point A relativement à la droite $\beta\delta$ est le point C et que le symétrique du point C relativement à la droite $\beta\alpha$ est le point D; on a donc les deux relations suivantes :

$$A\beta\gamma + C\beta\gamma = 2\delta\beta\gamma \quad \text{et} \quad C\beta\gamma + D\beta\gamma = 2\alpha\beta\gamma;$$

les points A et D étant d'ailleurs aussi symétriques par rapport à la droite $\beta\gamma$, on a également

$$A\beta\gamma + D\beta\gamma = 0.$$

Chacune des trois relations précédentes doit être vérifiée *à un multiple près de* 2π; on en déduit facilement

$$2A\beta\gamma = 2(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\gamma) = 2\delta\beta\alpha,$$

d'où

$$A\beta\gamma = \delta\beta\alpha,$$

relation qui doit être vérifiée *à un multiple près de* π.

Cette dernière relation détermine une droite contenant le point A ; la relation

$$A\gamma\delta = \beta\gamma\alpha,$$

que l'on obtient d'une façon analogue, détermine une seconde droite contenant le point que l'on peut ainsi construire facilement.

On construirait de même les autres sommets B, C et D du quadrangle cherché.

8. Dans le cas particulier où le quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ est formé des sommets d'un triangle et du point de rencontre des hauteurs de ce triangle, on sait que l'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par ces quatre points est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Le quadrangle ABCD, qui a pour dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$, est alors le symétrique de ce dernier quadrangle relativement au centre de l'hypocycloïde.

On voit donc que :

Si l'on considère les trois sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs de ce triangle, les asymptotes des coniques passant par ces quatre points enveloppent une hypocycloïde à trois points de rebroussement, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la courbe symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

II.

9. Considérons une conique quelconque C et un axe A de cette conique ; soient M et M′ deux quelconques

de ces points. Par le milieu I du segment MM′ menons une perpendiculaire à cette droite et soit H le point où cette perpendiculaire rencontre l'axe. Imaginons maintenant que la conique, en tournant autour de l'axe A, engendre une surface de révolution ; les deux points M et M′ engendrent deux parallèles de cette surface et la sphère contenant ces deux parallèles a pour centre le point H. Si donc on prend respectivement sur ces deux parallèles deux points arbitraires m et m', on voit que le plan, mené par le milieu du segment mm' et perpendiculairement à ce segment, passe par le point H.

De cette remarque et de la proposition que j'ai rappelée plus haut (n° 2) résulte immédiatement le théorème suivant :

Étant donnés sur une surface du second ordre de révolution deux points fixes A *et* B *et un point mobile* M, *si, par les points milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des plans perpendiculaires à ces cordes, le segment que ces plans interceptent sur l'axe de révolution de la surface est un segment dont la longueur demeure constante lorsque le point* M *se déplace.*

La même propriété a lieu évidemment relativement à une courbe quelconque tracée sur une surface de révolution du second ordre, lorsque l'on considère sur cette courbe deux points fixes A et B et un point mobile M.

En particulier :

Une courbe quelconque étant tracée sur une surface de révolution du second ordre, considérons deux points quelconques M *et* N *situés sur cette courbe. Menons les plans normaux à la courbe aux points* M *et* N *et désignons respectivement par* m *et* n *les points où ces plans normaux rencontrent l'axe de révolution de cette sur-*

face; soit de plus H *le point où le plan mené par le milieu de la corde* MN *et perpendiculairement à cette corde rencontre cet axe. Cela posé, le point* H *est le milieu du segment mn.*

10. Considérons une *ellipsimbre droite* (*), c'est-à-dire la courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant trois axes communs, que l'on peut appeler les axes de l'ellipsimbre.

On sait que cette courbe peut être placée sur une surface du second ordre de révolution ayant l'une quelconque de ces trois droites pour axe de révolution.

Donc :

Étant donnée une ellipsimbre droite et deux points quelconques M *et* N *pris sur cette courbe, les plans menés normalement à la courbe aux points* M *et* N *interceptent sur les trois axes de l'ellipsimbre trois segments; le plan passant par leurs points milieux passe par le point milieu de la corde* MN *et lui est perpendiculaire.*

11. Soit S une surface de révolution du second ordre ayant pour axe la droite Δ, et soient A, B, C et D quatre points quelconques situés sur cette surface. Les plans menés par les milieux des cordes AB et BC et perpendiculairement à ces cordes interceptent sur l'axe Δ un segment qui (n° 9) est égal au segment intercepté sur la même droite par les plans menés, par les milieux des cordes AD et DC, perpendiculairement à ces cordes; d'autres propositions semblables s'obtiendraient en considérant

(*) Expression employée d'abord par Frézier et adoptée par M. de la Gournerie dans ses *Recherches sur les surfaces tétraédrales.*

les diverses droites qui joignent deux à deux les sommets du tétraèdre ABCD.

Ces diverses propositions peuvent être résumées dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un tétraèdre inscrit dans une surface de révolution du second ordre, considérons les perpendiculaires abaissées sur les faces de ce tétraèdre par le centre de la sphère qui lui est circonscrite; les trois couples de plans opposés, que l'on peut mener par ces quatre droites, interceptent sur l'axe de la surface trois segments dont le point milieu est le même.*

En d'autres termes :

Si l'on désigne par ε *le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* ABCD *et si l'on mène par le point* ε *une parallèle à l'axe* Δ, *le cône du second degré, ayant pour sommet* ε *et contenant la parallèle dont je viens de parler ainsi que les perpendiculaires aux faces du tétraèdre, est asymptote à l'axe* Δ.

Le plan passant par Δ *et le sommet* ε *est donc tangent au cône.*

12. Les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre que l'on peut mener par quatre points donnés A, B, C et D forment un complexe dont il est facile de trouver, d'après ce qui précède, les propriétés les plus essentielles.

Désignons, comme ci-dessus, par ε le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD et par A′, B′, C′ et D′ les perpendiculaires abaissées du point ε sur les faces du tétraèdre.

Les droites du complexe, situées dans un plan donné P, s'obtiendront facilement ; si l'on appelle α', β', γ' et δ' les

points où ce plan est percé par les droites A', B', C' et D', ce sont les asymptotes des coniques passant par les quatre points α', β', γ' et δ'. Ainsi *les droites du complexe, situées dans le plan* P, *enveloppent la courbe de troisième classe étudiée dans le* § I.

Pour obtenir les droites du complexe passant par un point donné O, imaginons les divers cônes du second ordre qui renferment les droites α', β', γ' et δ', et par O menons les plans tangents à ces cônes; *les arêtes de contact forment un cône du troisième degré qui, transporté parallèlement à lui-même, en sorte que son sommet vienne en* O, *donnera le cône du complexe.*

On voit que ce cône ne varie pas et se déplace parallèlement à lui-même lorsque le point O se meut sur une droite passant par le centre ε de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

13. Étant donné un système de cinq points A, B, C, D et E, il est facile de déterminer une surface de révolution du second ordre passant par ces points et ayant pour axe une droite parallèle à une droite donnée Δ.

Soient, en effet, α, β, γ, δ et ε les centres des sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former avec les cinq points donnés, α étant par exemple le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre BCDE, β le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ACDE, etc.

Par le point α, menons une parallèle Δ' à Δ et imaginons le cône du second ordre (α) ayant pour sommet α et pour arêtes les droites Δ', $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ et $\alpha\varepsilon$; par le point β, menons de même une parallèle Δ'' à Δ et imaginons le cône du second ordre (β), ayant pour sommet le point β et ayant pour arêtes les droites Δ'', $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ et $\beta\varepsilon$. Ces deux cônes, comme on le voit, ayant en com-

mun la génératrice $\alpha\beta$, se coupent en outre suivant une cubique gauche.

Cela posé, les plans tangents menés respectivement aux cônes (α) et (β) le long des arêtes Δ' et Δ'' se coupent suivant une droite qui est l'axe d'une surface de révolution du second ordre passant par les points A, B, C, D et E.

14. On déduit encore de là la proposition suivante :

Cinq points étant donnés sur une surface de révolution du second ordre, les cinq centres des sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former en considérant quatre quelconques de ces points sont sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.

D'où l'on conclut que le système de droites formé par les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre passant par cinq points donnés se confond avec le système formé par les asymptotes des cubiques gauches passant par cinq autres points fixes, ces derniers points étant les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres déterminés par les cinq premiers points.

III.

15. Les théorèmes qui précèdent sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces de révolution engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

On appelle *ligne spirique* (*) une courbe plane du

(*) *Voir*, sur la théorie des lignes spiriques, le Mémoire de M. de la

quatrième ordre qui possède un axe de symétrie et qui a pour points doubles les deux ombilics du plan.

Cette courbe a deux foyers singuliers situés sur son axe de symétrie. Si ces deux foyers coïncident, la courbe est un ovale de Descartes; dans le cas où l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, la courbe devient une *cataspirique* et elle n'est plus que du troisième degré. Enfin, si les deux foyers singuliers sont rejetés à l'infini, la courbe devient simplement une conique.

Cela posé, je m'appuierai sur la propriété suivante, que j'ai énoncée dans ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques* (*loc. cit.*) :

Étant donnés deux points fixes A *et* B *situés sur une spirique et un point* M *mobile sur cette courbe, si, par les milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des droites respectivement perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur l'axe de la courbe deux divisions homographiques dont les points doubles sont les foyers singuliers situés sur cet axe.*

D'où la proposition suivante :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les trois couples de côtés opposés du quadrangle dérivé rencontrent l'axe de la courbe en six points en involution; les deux points doubles de cette involution partagent harmoniquement le segment déterminé par les deux foyers singuliers situés sur l'axe.

Gournerie, *Sur les lignes spiriques*, inséré dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIV; ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques*, insérée dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (novembre 1869) et ma Note *Sur la cardioïde* (*Nouvelles Annales*, 1878).

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers, situés sur l'axe de la courbe, sont sur une même conique.

16. Considérons la surface de révolution Σ engendrée par la rotation d'une spirique autour de son axe de symétrie; nous obtiendrons facilement les théorèmes qui suivent :

Une surface Σ étant circonscrite à un tétraèdre ABCD, *si, du centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces, ces quatre perpendiculaires et les droites qui joignent le centre de la sphère aux deux foyers singuliers de Σ sont situées sur un même cône du second ordre.*

Une surface Σ passant par cinq points donnés, considérons les centres des cinq sphères circonscrites aux tétraèdres que l'on peut former en prenant quatre quelconques des points donnés ; ces cinq centres et les deux foyers singuliers de la surface Σ sont situés sur une même cubique gauche.

COMPARAISON DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON A CELLE DITE DES PARTIES PROPORTIONNELLES;

PAR M. L. MALEYX.

1. La méthode d'approximation de Newton est justement appréciée des personnes qui l'ont appliquée, pour

la rapidité avec laquelle elle permet d'approcher d'une racine séparée, quand elle se trouve comprise entre deux nombres assez voisins.

2. Je lui trouve même un autre avantage, en la modifiant d'après la forme donnée par Lagrange au reste de la série de Taylor : c'est de permettre de se rapprocher d'aussi près qu'on le voudra de la racine réelle d'une équation qui surpasse immédiatement un nombre donné, sans la dépasser. Cette propriété permet de fonder sur cette méthode d'approximation un procédé rigoureux de séparation, comme je l'ai établi dans une Note publiée chez Hachette en 1860.

3. Malgré cela, je crois que, sans augmentation de travail total, la méthode dite des parties proportionnelles, convenablement appliquée à l'approximation d'une racine séparée, donne un résultat plus approché que celle de Newton, et je me propose de l'établir.

4. Soit $F(x) = 0$ une équation dont le premier membre, ainsi que les première et seconde dérivées $F'(x)$, $F''(x)$, sont finis et continus entre les deux nombres a et b qui comprennent une seule racine, α, de $F(x) = 0$. Je ne fais aucune hypothèse sur les signes que peut prendre $F''(x)$ quand on y fait varier x de a à b, mais je supposerai qu'il n'existe pas de racine de $F'(x) = 0$ dans le même intervalle.

Désignons par h la différence positive ou négative $\alpha - a$, par $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$ les excès positifs ou négatifs de la racine α sur les valeurs approchées successives fournies par la méthode de Newton, et que nous représenterons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$; par $h_1, h_2, \ldots, h_n$ les corrections successives fournies par la même méthode;

nous aurons les deux séries d'égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} h = h_1 + h'_1, \\ h'_1 = h_2 + h'_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ h'_{n-1} = h_n + h'_n, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} h'_1 = -\dfrac{h^2 F''(a+\theta h)}{2F'(a)}, \\ h'_2 = -\dfrac{h'^2_1 F''(a_1+\theta_1 h'_1)}{2F'(a_1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ h'_n = -\dfrac{h'^2_{n-1} F''(a_{n-1}+\theta_{n-1} h'_{n-1})}{2F'(a_{n-1})}. \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et réduisant, on a

$$(3)\qquad h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n + h'_n;$$

$h_1, h_2, \dots, h_n$ sont connus, h'_n est inconnu et représente l'erreur.

Élevons les deux membres de chacune des égalités (2), à partir de la dernière, à des puissances dont les exposants soient respectivement 2^0, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}; en désignant, pour abréger, $-\dfrac{F''(a_k+\theta_k h_k)}{2F'(a_k)}$ par M_k, nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} h'^{2^{n-1}}_1 = h^{2^n} M^{2^{n-1}}, \\ h'^{2^{n-2}}_2 = h'^{2^{n-1}}_1 M_1^{2^{n-2}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ h'_n = h'^2_{n-1} M_{n-1}. \end{cases}$$

Multiplions maintenant les égalités (4) membre à membre, et supprimons les facteurs communs aux deux membres, nous en déduirons

$$(5)\qquad h'_n = h^{2^n} \times M^{2^{n-1}} \times M_1^{2^{n-2}} \times \dots \times M_{n-1}^{2^0}.$$

Désignons par μ un nombre inconnu, mais numériquement moindre que le plus grand des nombres M, M_1, ..., M_{n-1}, nous pourrons, en observant que

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0 = 2^n - 1,$$

poser

$$\pm \mu^{2^n - 1} = M^{2^{n-1}} \times M_1^{2^{n-2}} \times \ldots \times M_{n-1}^{2^0},$$

et enfin

$$h' = \pm h^{2^n} \times \mu^{2^n - 1}, \quad \text{ou} \quad h_n = \pm h \times (h \times \mu)^{2^n - 1},$$

le calcul ayant exigé $2 \times n$ substitutions, en comptant celles qui ont été faites dans $F(x)$ et dans $F'(x)$.

Il est évident qu'on ne peut approcher rapidement de la racine α que quand $h + \mu$ est numériquement moindre que 1, et qu'on s'en rapprochera d'autant plus vite que ce nombre sera plus petit.

Cette condition étant nécessaire pour la rapidité de l'approximation, même quand on fait sur les signes que peut prendre $F''(x)$ toutes les restrictions connues, il s'ensuit que ces restrictions sont généralement inutiles.

μ est un nombre inconnu compris entre la plus petite et la plus grande valeur que peut prendre le rapport $-\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$, x_1 et x_2 étant deux nombres compris entre a et b; ce rapport ne peut devenir infini, puisque nous avons supposé que $F'(x) = 0$ n'avait pas de racine entre a et b; de plus, il ne varie que dans des limites assez peu étendues, si $b - a$ est numériquement assez petit.

On peut former deux limites de mêmes signes ou de signes contraires entre lesquelles le nombre $F''(x_1)$ est compris, et deux limites de mêmes signes comprenant $F'(x_2)$; sachant du reste que h est numériquement inférieur à $(b - a)$, on pourra, en formant deux limites

comprenant $h + \mu$, voir si la condition imposée à ce nombre d'être numériquement inférieure à 1 est remplie.

5. Passons maintenant à la méthode des parties proportionnelles; conservant les hypothèses faites dans le numéro précédent, posons les égalités

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{-F(a)}{\mu_1},$$

$$a'_1 = a + \mu_1.$$

$$\frac{F(a) - F(a'_1)}{a - a'_1} = \frac{-F(a'_1)}{\mu_2},$$

$$a'_2 = a'_1 + \mu_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{F(a'_{p-1}) - F(a'_p)}{a_{p-1} - a'_p} = \frac{-F(a'_p)}{\mu_{p+1}},$$

$$a'_{p+1} = a'_p + \mu_{p+1}.$$

On en déduit, en ajoutant ces égalités de deux en deux à partir de la seconde,

$$a'_{p+1} = a + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{p+1}.$$

Remplaçant dans cette dernière a par la quantité égale $\alpha - h$ et transposant, on a

$$h = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{p+1} + (\alpha - a'_{p+1}).$$

Posons encore

$$h = \mu_1 + \mu'_1,$$

$$\mu'_1 = \mu_2 + \mu'_2,$$

$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\mu'_p = \mu_{p+1} + \mu'_{p+1},$$

on trouve par addition

$$h = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_{p+1} + \mu'_{p+1};$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p+1}$ sont des nombres connus, μ'_{p+1} est l'er-

reur commise en acceptant a'_{p+1} comme valeur approchée de α.

6. De l'égalité

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{-F(a)}{\mu_1},$$

on tire

$$\mu_1=\frac{-(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{-(b-a)F(a)}{F[a+(b-a)]-F(a)},$$

ou, développant le dénominateur et réduisant,

$$\mu_1=\frac{-F(a)}{F'(a)+\frac{(b-a)}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]},$$

ou

$$\mu_1=-\frac{F(a)}{F'(a)}\left(1-\frac{(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}\right);$$

mais on a aussi

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)}-\frac{h^2}{2}\frac{F''(a+\varepsilon h)}{F'(a)};$$

d'où, en éliminant $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ entre les deux dernières égalités,

$$\mu_1=\left[h+\frac{h^2F''(a+\varepsilon h)}{2F'(a)}\right]$$
$$\times\left(1-\frac{(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}\right),$$

qui peut se mettre sous la forme

$$h=\mu_1+\frac{h(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}$$
$$-\frac{h^2F''(a+\varepsilon h)}{2F'(a)}\left(1-\frac{(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}\right);$$

h est plus petit que $(b-a)$. Posons

$$h = \mu_1 + h(b-a)N_1.$$

Il résulte de la forme du second membre de l'égalité qui précède de deux rangs que, en général, N_1 ne diffère pas beaucoup de l'une des valeurs du rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$, x_1 et x_2 étant deux nombres compris entre a et b.

Si $(b-a)\times N_1$ est numériquement plus petit que l'unité, ce qui est la condition pour que la méthode de Newton s'applique avec succès, la différence $h-\mu_1$ ne sera qu'une fraction de h; elle ne sera même qu'une fraction de μ_1, si $(b-a)N_1$ est numériquement moindre que $\frac{1}{2}$.

En effet, on a l'égalité $\mu_1 = h[1-(b-a)N_1]$; d'après l'hypothèse, $1-(b-a)N_1$ ne peut varier qu'entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$: donc μ_1 ne peut varier qu'entre $\frac{3}{2}h$ et $\frac{1}{2}h$; il est du signe de h et numériquement supérieur à $\frac{1}{2}h$; il en résulte que $h-\mu_1$, qui n'est qu'une fraction proprement dite de $\frac{1}{2}h$, le sera, *a fortiori*, de la quantité μ_1 numériquement supérieure.

Si nous admettons qu'il en soit ainsi, le nombre μ'_1 défini au n° 5 sera numériquement moindre que h et que μ_1; de plus h et μ_1 seront de mêmes signes.

En répétant le même calcul, on en conclura que μ'_2 n'est qu'une fraction de μ'_1 et de μ_2, et qu'en général μ'_k n'est qu'une fraction de μ'_{k-1} et de μ_k.

De plus, on voit qu'en général chaque correction fournie par la méthode ne diffère de la correction vraie que du produit de cette correction vraie par la différence des deux valeurs approchées précédentes et par un nombre

voisin de l'une des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$ précédemment défini. On pourra donc écrire les égalités

$$\begin{aligned}
\mu'_1 &= h \times (b-a) \times N_1,\\
\mu'_2 &= \mu'_1\,\mu_1 \times N_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mu'_{p+1} &= \mu'_p\,\mu_p \times N_{p+1}.
\end{aligned}$$

Les deux nombres h et μ_1, et généralement μ'_{k-1} et μ_k n'ayant qu'une petite différence par rapport à eux-mêmes, on pourra, sans altérer sensiblement les coefficients N_2, N_3, ..., N_{p+1}, remplacer dans les égalités précédentes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ respectivement par $h, \mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_{p-1}$; on aura ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mu'_1 &= h \times (b-a) \times N_1,\\
\mu'_2 &= \mu'_1 \times h \times P_2,\\
\mu'_3 &= \mu'_2 \times \mu'_1 \times P_3,\\
\mu'_4 &= \mu'_3 \times \mu'_2 \times P_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mu'_{p+1} &= \mu'_p \times \mu'_{p-1} \times P_{p+1},
\end{aligned}\right.$$

$P_2, P_3, \ldots, P_{p+1}$ ne différant pas sensiblement de N_2, N_3, ..., N_{p+1} et étant, en conséquence, voisins chacun de l'une des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$.

8. Éliminons entre les équations (1) du n° 7 les inconnues $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p$.

Pour cela, écrivons la première, et au-dessous l'équation résultant de la multiplication membre à membre des deux premières

$$\begin{aligned}
\mu'_1 &= h \times (b-a) \times N_1,\\
\mu'_2 &= h^2 \times (b-a) \times N_1 \times P_2;
\end{aligned}$$

multiplions membre à membre les deux dernières et la troisième des équations (1) du n° 7, on a

$$\mu'_3 = h^3 \times (b-a)^2 \times N_1^2 \times P_2 \times P_3.$$

Généralement multiplions membre à membre les deux dernières équations obtenues et celle qui suit, dans les équations (1) du n° 7, la dernière sur laquelle on a opéré, on obtient successivement

$$\mu'_4 = h^5 \times (b-a)^3 N_1^3 \times P_2^2 \times P_3 \times P_4,$$
$$\mu'_5 = h^8 \times (b-a)^5 N_1^5 \times P_2^3 \times P_3^2 \times P_4 \times P_5.$$

La loi de formation est évidente. Si nous posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \qquad\qquad = 1, \\ \lambda_2 = \lambda_1 + \ 1 \quad = 2, \\ \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_1 \ = 3, \\ \lambda_4 = \lambda_3 + \lambda_2 \ = 5, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{p+1} = \lambda_p + \lambda_{p-1} = 2p - 1, \end{array}\right.$$

on aura

$$\mu'_{p+1} = h^{\lambda_{p+1}} \times (b-a)^{\lambda_p} \times N_1^{\lambda_p} \times P_2^{\lambda_{p-1}} \times P_3^{\lambda_{p-2}} \times \ldots \times P_p^{\lambda_1} \times P_{p+1}$$

ou, en désignant par π un nombre inconnu numériquement moindre que le plus grand des nombres N_1, P_2, P_3, ..., P_{p+1},

$$\mu'_{p+1} = h^{\lambda_{p+1}} \times (b-a)^{\lambda_p} \times \pi^{\lambda_{p-1} + \lambda_{p-2} + \lambda_{p-3} + \ldots + \lambda_2 + \lambda_1 + 1};$$

or, en ajoutant les égalités (2) du n° 8, on a, après réduction,

$$\lambda_{p+1} = 1 + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1},$$

d'où l'on déduit

$$\lambda_{p+1} + \lambda_p - 1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1} + \lambda_p.$$

Donc

$$\mu'_{p+1} = \pm h \times (h \times \pi)^{\lambda_{p+1}-1} \times [(b-a) \times \pi]^{\lambda_p}.$$

9. Chaque correction obtenue par la méthode des parties proportionnelles n'exige qu'une substitution, à l'exception de la première qui en exige deux; d'où il résulte que, après avoir fait $2n$ substitutions, on sera parvenu à la correction de rang $2n - 1$. L'erreur commise sera alors

$$\mu'_{2n-1} = \pm h \times (h\pi)^{\lambda_{2n-1}-1} \times [(b-a) \times \pi]^{\lambda_{2(n-1)}}.$$

Celle que donne la méthode de Newton, après le même nombre de substitutions, est

$$h'_n = \pm h \times (h_\mu^{2^n-1}).$$

Or, si l'on admet que $h\pi$ et $h\mu$ soient à peu près égaux, et comme il est facile de vérifier que si $n \geq 3$, $\lambda_{2n-1} \geq 2^n$, on voit que μ'_{2n-1} est notablement moindre que h'_n.

La partie pénible de l'application de l'une ou l'autre méthode étant la substitution, on doit en conclure que l'avantage reste à la méthode des parties proportionnelles.

10. Je considère comme suffisamment établi, d'après ce qui précède, que la partie utile à retenir dans chaque correction peut se régler de la manière suivante : on formera d'abord un nombre qui ne puisse être numériquement inférieur au rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$, x_1 et x_2 étant deux nombres compris entre a et b, soit M ce nombre; pour la méthode de Newton on ne retiendra dans la valeur de h_p, supposé développé en décimales, que les unités dont la valeur n'est pas inférieure à une unité de l'ordre le plus élevé du produit $h_p^2 \times M$; pour la méthode des

parties proportionnelles, on ne retiendra dans la valeur de μ_p que les unités dont la valeur n'est pas inférieure à une unité de l'ordre le plus élevé du produit $\mu_p \times \mu_{p-1}$ M.

Du reste, dans l'un et l'autre cas on acceptera, à son choix, la valeur approchée par excès ou par défaut.

11. Dans ce qui précède, nous avons supposé remplies les conditions pour que la méthode de Newton puisse s'appliquer et donner une approximation assez rapide; mais la méthode des parties proportionnelles a sur elle un autre avantage, c'est celui de permettre de resserrer une racine séparée dans un intervalle plus étroit, sans aucune restriction relative à la dérivée première ou à la dérivée seconde; il suffit pour cela de l'appliquer à deux résultats de substitution de signes contraires.

Un seul inconvénient est attaché à ce procédé : il pourrait se faire que les valeurs approchées successives le fussent toutes dans le même sens, et qu'alors l'une des limites entre lesquelles la racine resterait comprise fût fixe. On peut alors y remédier en substituant, au lieu de la dernière valeur approchée trouvée, un nombre compris entre cette valeur et la limite qui reste fixe. On aura ainsi, ou une valeur approchée de même sens et plus approchée, ou une valeur approchée de sens contraire, et la limite qui restait fixe sera changée.

12. Pour terminer, nous allons donner les résultats de l'application des deux méthodes à un même exemple.

Soit l'équation

$$(1) \qquad e^x - x^e - \frac{\pi}{2} = 0;$$

e étant incommensurable, on ne peut attribuer aucun sens pareil à x^e dans la supposition où l'on donnerait à x

une valeur négative; nous ne nous occuperons donc que des racines positives.

D'après le théorème de Rolle, ces racines sont séparées par celles de

$$(2) \qquad e^x - ex^{e-1} = 0.$$

On voit facilement que l'équation (2) admet pour racines $x = 1$ et $x = e$, et elle n'en admet pas d'autres. En effet, d'après une Note que j'ai publiée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XI, p. 404), les racines de l'équation (2) sont séparées par celles de l'équation

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & e^x - ex^{e-1} - [e^x - e(e-1)x^{e-2}] \\ & \qquad = -e \times x^{e-2}[x - (e-1)] = 0. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans l'équation (2) les racines 0 et $(e-1)$ de l'équation (3), on reconnaît qu'elle n'a que les deux racines trouvées.

Les racines de l'équation (1) sont donc séparées par les nombres de la suite

$$0, \quad 1, \quad e, \quad +\infty.$$

On reconnaît, en les substituant dans l'équation (1), qu'elle a et qu'elle n'a que trois racines réelles. Proposons-nous de calculer approximativement la racine comprise entre 1 et e. Au moyen de quelques substitutions réglées d'après la méthode des parties proportionnelles, on reconnaît que cette racine est comprise dans l'intervalle de 1,3 à 1,4.

Désignons par x_1 et x_2 deux nombres quelconques compris entre les mêmes limites, on a les inégalités

$$\begin{aligned} -1,189 < e^{1,3} - e(1,4)^{e-1} < F'(x_2) \\ < e^{1,4} - e(1,3)^{e-1} < -0,196, \\ -2,302 < e^{1,3} - e(e-1)(1,4)^{e-2} < F''(x_1) \\ < e^{1,4} - e(e-1)(1,3)^{e-2} < -1,580; \end{aligned}$$

d'où

$$M = \frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)} < \frac{2,302}{2 \times 0,196} = \frac{2306}{392} < 6.$$

On reconnaît d'après ces inégalités que toutes les conditions désirables pour l'application de la méthode de Newton sont remplies pour la limite supérieure 1,4.

Appliquant cette méthode, on trouve successivement

$$\begin{aligned} F(1,4) &= -0,011438, \\ F'(1,4) &= -0,79080, \\ h_1 &= -0,0144, \\ a_1 &= 1,3856; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(a_1) &= -0,000248058, \\ F'(a_1) &= -0,763448, \\ h_2 &= -0,00032491, \\ a_2 &= 1,38527509; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(a_2) &= -0,000000107000097935, \\ F'(a_2) &= -0,7628290790, \\ h_3 &= -0,0000001402686 1, \\ a_3 &= 1,38527494973139. \end{aligned}$$

a_3 est la valeur approchée de la racine α, obtenue par la méthode de Newton au moyen de six substitutions.

Voyons maintenant ce que donne la méthode des approximations successives :

$$\begin{aligned} F(1,3) &= 0,0580, \\ F(1,4) &= -0,0114, \\ \mu_1 &= 0,083, \\ a'_1 &= 1,383; \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_1) &= 0,0017304 \\ \mu_2 &= 0,00223 \\ a'_2 &= 1,38523 \end{aligned}\right\} \text{au moyen de } F(1,4);$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_2) &= 0,00003428702 \\ \mu_3 &= 0,00004508 \\ a'_3 &= 1,38527508 \end{aligned}\right\}\text{au moyen de } F(a'_1);$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_3) &= -0,0000000099372690 \\ \mu_4 &= -0,000000130275 \\ a'_4 &= 1,385274949725 \end{aligned}\right\}\text{au moyen de } F(a'_2);$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_4) &= 0,0000000000048509402 37563 \\ \mu_5 &= 0,0000000000063591454 \\ a'_6 &= 1,3852749497313591454 \end{aligned}\right\}\text{au moyen de } F(a'_3).$$

a'_5 est la valeur approchée de α, obtenue par la méthode des parties proportionnelles au moyen de six substitutions.

Si l'on forme $F'(a'_4)$, on trouve

$$F'(a'_4) = -0,762828815430$$

et, en appliquant la méthode de Newton à partir de a'_4, on trouve pour la correction

$$0,0000000000063591465 92.$$

On peut en conclure que a'_5 est approché à moins de $\frac{12}{10^{19}}$, tandis que a_8 ne l'est qu'à moins de $\frac{3}{10^{14}}$.

La méthode des parties proportionnelles a donc fait gagner entre quatre et cinq chiffres décimaux.

Nota. — Les calculs précédents ont été exécutés au moyen des excellentes Tables de logarithmes à vingt-sept décimales de Fédor Thoman.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878.

Mathématiques spéciales.

Les droites A'OA, B'OB, C'OC sont trois axes de coordonnées rectangulaires; on suppose $OA' = OA = a$, $OB' = OB = b$, $OC' = OC = c$.

Déterminer : 1° le lieu des axes de révolution des surfaces de révolution du second degré qui passent par les six points A', A, B', B, C', C; 2° le lieu des extrémités D de ces axes.

On construira la projection du lieu des points D sur le plan AOB, en supposant $a > c > b$, et l'on partagera la courbe en arcs tels que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.

Mathématiques élémentaires.

Déterminer les rayons des deux bases d'un tronc de cône, connaissant : 1° la hauteur h du tronc; 2° le volume qui est équivalent aux trois quarts du volume de la sphère de diamètre h; 3° la surface latérale équivalente à celle du cercle de rayon a.

On ne considérera que les troncs formés par des plans qui coupent les arêtes d'un même côté du sommet, et l'on indiquera le nombre des solutions qui correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{a}{h}$.

Philosophie.

On coupe une pyramide triangulaire donnée SABC par un plan parallèle à la base : ce plan rencontre les

arêtes latérales SA, SB, SC respectivement en A′, B′, C′; on mène ensuite les plan AB′C′, BC′A′, CA′B′; soit P leur point commun. Déterminer le lieu décrit par le point P, lorsque le plan A′B′C′ se déplace en demeurant parallèle à ABC.

Rhétorique.

1. Déterminer sur un diamètre AB d'une sphère de rayon R un point tel que, si l'on mène par ce point un plan perpendiculaire à ce diamètre, la surface de la zone sphérique limitée par ce plan et contenant le point A soit équivalente à la surface latérale du cône qui a pour base le cercle d'intersection de la sphère et du plan et pour sommet le point B. Cela étant, calculer le rapport du volume de ce cône au volume de la sphère.

2. Inégalité des jours et des nuits. Saisons.

Seconde.

On donne sur une circonférence deux points A, B, diamétralement opposés; on prend, sur cette circonférence, un point quelconque C, et l'on porte sur la droite AC, de part et d'autre du point C, des longueurs égales CD, CD′, telles que le rapport de chacune à la longueur CB soit égal à un rapport donné. On fait mouvoir le point C sur la circonférence, et l'on demande :

1° Les lieux des points D et D′;

2° Les lieux des points de concours des hauteurs du triangle ABD et du point de concours des hauteurs du triangle ABD′;

3° Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle BDD′;

4° Les lieux des centres des cercles exinscrits au même triangle BDD′.

Troisième.

1. Étant donnés dans un plan un cercle O, un point A sur la circonférence de ce cercle, et une droite quelconque D, trouver sur cette droite un point tel, qu'en menant de ce point les deux tangentes au cercle O, et joignant les points de contact au point A, les lignes de jonction fassent entre elles un angle donné V.

2. Trouver deux nombres, sachant que leur rapport est $\frac{5}{18}$, leur plus grand commun diviseur 30 et leur plus petit commun multiple 2700.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1878

(voir 2e série, t. XVII, p. 461);

PAR M. CHARLES-ADOLPHE BOREL (*).

1° Soit $Ax^2 + Cy^2 = F$ l'équation d'une conique ayant ses axes dirigés suivant Ox et Oy.

L'équation d'une normale à cette conique au point (x_1, y_1) est

$$y - y_1 = \frac{Cy_1}{Ax_1}(x - x_1),$$

ou

$$\frac{C}{(C-A)x_1}x - \frac{A}{(C-A)y_1}y - 1 = 0.$$

En exprimant que cette normale coïncide avec la

(*) Cet élève a eu la note 20 et a été reçu le 158e.

droite D, dont l'équation est

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0,$$

j'ai les deux relations

$$(1) \qquad p = \frac{(C - A)x_1}{C}, \quad q = -\frac{(C - A)y_1}{A}.$$

Si je désigne par α, β les coordonnées du point M, pôle de la droite D par rapport à la conique, l'équation de cette droite D pourra encore se mettre sous la forme

$$A\alpha x + C\beta y - F = 0.$$

Si j'exprime que cette polaire coïncide avec la droite D, j'ai encore les deux relations

$$(2) \qquad p = \frac{F}{A\alpha}, \quad q = \frac{F}{C\beta}.$$

De ces équations (2) je tire les valeurs de A et de C et je les porte dans les relations (1); j'ai ainsi, en résolvant les équations (1) par rapport à x_1 et y_1,

$$x_1 = \frac{\alpha p^2}{\alpha p - \beta q}, \quad y_1 = -\frac{\beta q^2}{\alpha p - \beta q}.$$

En portant ces valeurs de A, C, x_1, y_1 dans l'équation

$$A x_1^2 + C y_1^2 - F = 0,$$

j'ai l'équation du lieu du point M

$$\frac{F}{p\alpha}\frac{\alpha^2 p^4}{(\alpha p - \beta q)^2} + \frac{F}{q\beta}\frac{\beta^2 q^4}{(\alpha p - \beta q)^2} - F = 0.$$

En simplifiant et en remplaçant α par x et β par y,

j'ai l'équation

$$(px - qy)^2 - p^3x - q^3y = 0.$$

Le lieu du point M est donc une parabole.

Cette parabole passe par l'origine O et par les points de rencontre P et Q de la droite D avec les axes.

Elle doit passer, en effet, par le point O, car, parmi les coniques ayant leurs axes dirigés suivant Ox et Oy, il y a le système de droites dont l'une est perpendiculaire à D. Le pôle de D, par rapport à cette conique, est justement le point O.

Considérons maintenant le point P. Parmi les coniques normales à D, il en est qui ont leur sommet très-voisin du point P. Quand ce sommet se rapproche du point P, le point d'incidence de la normale se confond avec son second point de rencontre avec la conique, et le point M se confond aussi avec le point P. Donc le lieu passe par le point P. Le même raisonnement ferait voir que la parabole passe par le point Q.

L'axe de la parabole est parallèle à la droite

$$px - qy = 0;$$

il est donc perpendiculaire à D. D'ailleurs cet axe passe par le milieu du segment PQ.

L'axe est ainsi construit géométriquement.

2° Je vais démontrer que la distance du foyer de cette parabole au sommet est égale au quart de la distance du point O à la droite D.

Considérons, en effet, une parabole et un cercle décrit sur une corde perpendiculaire à l'axe comme diamètre et coupant la parabole.

L'équation de la parabole est $y^2 - 2px = 0$. L'équation du cercle est $(x - \alpha)^2 + y^2 - 2p\alpha = 0$. Le cercle coupe la parabole en deux autres points C et C' symétriques par rapport à Ox.

Les abscisses des points d'intersection sont données par l'équation

$$(x-\alpha)^2+2px-2p\alpha=0.$$

Cette équation admet la racine $x=\alpha$ qui correspond aux deux extrémités du diamètre. L'autre racine, $\alpha-2p$, correspond aux points C et C'.

On a donc, pour la distance d'un des points C ou C' au diamètre perpendiculaire à l'axe, $\alpha-(\alpha-2p)=2p$.

La distance du foyer de la parabole au sommet, étant égale à $\frac{p}{2}$, est, par suite, égale au quart de cette distance.

Considérons alors la parabole lieu du point M. Cette parabole est circonscrite au triangle rectangle OPQ. De plus, son axe est perpendiculaire à PQ et passe par le milieu R de cette droite. Donc, d'après ce que je viens de démontrer, le paramètre de la parabole est égal à la moitié, et la distance du foyer au sommet est égale au quart de la distance du point O à la droite D.

3° Construire géométriquement l'axe et le sommet de la parabole revient à chercher le sommet d'une parabole passant par trois points O, P, Q et dont l'axe est connu.

On sait, en effet, que, la droite PQ étant perpendiculaire à l'axe, cet axe passe par le milieu R de PQ.

Pour construire le sommet, je prolonge OP jusqu'à sa rencontre en P' avec l'axe. Soit Q' le point où OQ coupe l'axe. Je prends le milieu de P'Q', et j'ai le sommet S.

J'en déduis la position du foyer F, car la distance SF est égale au quart de la distance du point O à la droite D et dirigée vers le point R.

Note. — Solutions analogues de MM. A. Guévara, ingénieur; J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; G. Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; Robaglia; Gambey; Lez et Moret-Blanc.

RESTITUTION DE PRIORITÉ EN FAVEUR DE M. CATALAN;

PAR M. F. FOLIE,
Membre de l'Académie royale de Belgique.

Dans le *Bulletin* du mois d'août 1877 (*), nous nous sommes occupé de la recherche de différentes propriétés que nous croyions tout à fait neuves.

L'une de celles-ci, intitulée : *Synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon,* nous avait tellement frappé par sa simplicité, que nous exprimions notre grande surprise de ne l'avoir rencontrée dans aucun des traités les plus complets et les plus récents.

Nous nous trompions cependant. Cette synthèse avait été faite, en 1852, par l'un de nos savants confrères, qui l'a consignée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1re série, t. XI, p. 173 (**) ; elle y est malheureusement restée oubliée, même de lui, et ce n'est que tout récemment qu'il nous a fait part de ce fait ; il nous a déclaré en outre, chose qui ne surprendra personne, que sa démonstration (qui ne figure pas dans les *Annales*) est identique à celle que nous avons donnée.

Nous nous empressons bien volontiers de restituer à notre savant confrère la priorité de cette découverte.

Les deux théorèmes suivants, que nous croyions neufs :

Les intersections successives des côtés alternants d'un

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* 2e série, t. XLIV, p. 182.

(**) L'article cité renvoie à une *Application de l'Algèbre à la Géométrie,* lithographiée et datant de 1848, par M. E. Catalan.

hexagone de Pascal forment les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon;

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon forment les côtés successifs d'un hexagone de Pascal;

Ces théorèmes, sur l'importance desquels nous avons insisté dans le numéro cité du *Bulletin*, doivent donc porter, sauf erreur, le nom de E. Catalan. Les seules découvertes qui nous appartiennent encore dans cette synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon sont :

En premier lieu, la combinaison des théorèmes de M. E. Catalan avec ceux de Steiner, dont voici les énoncés :

Les intersections successives des côtés alternants d'un hexagone de Brianchon forment les sommets successifs d'un hexagone de Pascal.

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Pascal forment les côtés successifs d'un hexagone de Brianchon;

Combinaison qui donne naissance à une série indéfinie d'hexagones de Pascal et de Brianchon.

En second lieu, la possibilité d'étendre cette même synthèse aux polygones conjugués inscrits ou circonscrits à des courbes supérieures, polygones pour lesquels nous avons démontré l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon (*).

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen; von C.-W. BORCHARDT. Aus den

(*) Voir *Fondements d'une Géométrie supérieure cartésienne.*

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1878.

Sur les solutions du problème de Délos, par Archytas et par Eudoxe; par M. P. Tannery. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*; 1878.

Sur la réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement relatif d'un corps solide; par M. Ph. Gilbert. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*; 1878.

Sulla convergenza dell' espressione infinita $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$; par G. Lemoyne. In-8. — Gênes, Sambolino; 1878.

Sul valore medio geometrico delle funzioni d'una variabile reale; par G. Lemoyne. Extrait du t. XVI du *Giornale di Matematiche*; 1878.

Mémoire sur un paradoxe mathématique et sur un nouveau caractère de décomposition; par M. L. Saltel. Extrait du t. XLVII, 2e série, des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*; 1879.

Sur la série récurrente de Fermat; par M. E. Lucas. Extrait du t. XI du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*; 1878.

Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable; par M. V. Liguine. Extrait du t. II, 2e série, du *Bulletin des Sciences mathématiques*; 1878.

Note relative au théorème sur la composition des accélérations d'ordre quelconque; par M. V. Liguine. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1878.

O determinantih drugoga i trecega stupnja. Za porabu visih srednjih ucilista napisao Dr K. Zahradnik. In-8. — Agram, Albrecht; 1878.

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE TRIANGLE;

Par M. LAGUERRE.

1. Soit un triangle inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique K; si cette conique est une parabole, on sait que son foyer est sur le cercle.

Laissant ce cas de côté, j'énoncerai la proposition suivante :

Soient F *et* G *les deux foyers de la conique,* F' *le point réciproque du foyer* F *relativement au cercle et* O *le centre de ce cercle; si, par le point* F, *on mène une droite parallèle à* OG, *cette droite rencontre* GF' *en un point* R *tel que le produit* GR $\times$ GF' *est égal au carré de l'axe qui renferme les deux foyers.*

2. Pour démontrer cette proposition, je remarque que l'on peut, d'après un théorème bien connu et dû à Poncelet, inscrire dans le cercle C une infinité de triangles circonscrits à la conique. En désignant par I et J les deux ombilics du plan, on sait que le cercle passe par ces deux points; on peut donc construire un triangle inscrit dans le cercle circonscrit à K, et dont l'ombilic I soit l'un des sommets. A cet effet, je mène par les foyers F et G les droites isotropes FI et FJ qui sont tangentes à la conique; ces droites rencontrent respectivement le cercle aux points m et n, et la droite mn est tangente à K.

3. Je rappellerai ici quelques notions très-simples que j'ai exposées dans une Note publiée précédemment dans les *Nouvelles Annales* (*). Un point quelconque A étant donné dans le plan, menons les deux droites isotropes AI et AJ qui se croisent en ce point, et désignons respectivement par a et par a' les points réels situés sur ces droites.

Il est clair que ces points sont parfaitement déterminés quand m se donne le point A; réciproquement, ces points déterminent complétement le point A, et l'on peut dire que aa' est son segment représentatif, a étant l'origine du segment et a' en étant l'extrémité.

Ceci posé, *si trois points sont en ligne droite, les deux triangles formés respectivement, par les origines des segments représentatifs de ces points et leurs extrémités, sont semblables et inversement placés.*

En second lieu, *si un point imaginaire est situé sur un cercle réel, les extrémités de son segment représentatif sont réciproques par rapport à ce cercle.*

4. Il résulte de là que, si l'on désigne respectivement par F' et G' les points réciproques des foyers F et G relativement au cercle C, les points m et n ont respectivement pour segments représentatifs FF' et GG'.

Je construis maintenant le point symétrique du point F relativement à la droite mn. A cet effet, par le point F, je mène la droite isotrope FI qui passe par le point m, puis par le point m la droite isotrope mJ qui contient le point réel F'; je mène ensuite la droite isotrope FJ, puis, en appelant p le point où elle rencontre la droite mn, la droite isotrope pI, et le point φ, où se rencon-

(*) *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX; 1870).

trent mJ et pI, est le point cherché. Si R est le point réel situé sur pI, on voit que son segment représentatif est RF′.

Pour obtenir le point R, je remarque que les trois points p, m et n étant en lignes droites et étant respectivement représentés par les segments RF, FF′ et GG′, les triangles RFG et FF′G′ sont semblables et inversement placés. D'où il suit que le point R est l'intersection de la droite GF′ avec la droite menée par le point F parallèlement à GG′. Si l'on remarque en effet que le quadrilatère FGF′G′ est inscriptible dans un cercle, on en conclut sans peine que les angles $\widehat{FGR}$ et $\widehat{F'G'F}$ sont égaux comme inscrits dans un même arc de circonférence ; par la même raison, l'angle $\widehat{F'FG'}$ est égal à l'angle $\widehat{F'GG}$ et ce dernier est égal par construction à l'angle $\widehat{FRG}$. Les angles $\widehat{FRG}$ et $\widehat{F'FG'}$ sont donc aussi égaux ; par suite, les triangles RFG et FF′G′ sont semblables, et, comme ils sont évidemment inversement placés, le point R est le point réel situé sur la droite isotrope pI.

5. Le point φ étant symétrique de F relativement à la droite mn, qui est une tangente de la conique K, est situé sur le cercle décrit autour du foyer G comme centre avec un rayon égal à l'axe de la conique qui contient ce foyer.

Le point φ est d'ailleurs représenté par le segment RF′ ; on en conclut d'abord que la droite RF′ passe par le point G, ce qui résulte de la construction même par laquelle on a déterminé le point R, puis que le produit $GR \times GF'$ est égal au carré de l'axe dont je viens de parler.

D'où la proposition que j'ai énoncée au commencement de cette Note.

6. Cette proposition peut s'énoncer d'une façon un peu différente.

Construisons le cercle passant par le point F′ *et tangent en* G *à la droite* OG ; *si l'on désigne par* Φ *le second point de rencontre de ce cercle avec l'axe* FG, *par* H *le centre de la conique, par* $2a$ *la longueur de l'axe de cette courbe qui renferme les foyers* F *et* G *et par* $2b$ *la longueur de l'autre axe, on a la relation*

$$(1)\qquad \mathrm{HF}.\mathrm{H}\Phi = a^2 + b^2,$$

en sorte que les points F *et* Φ *sont réciproques relativement au cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit la conique sous un angle droit.*

On peut remarquer, en effet, que, la droite FR étant parallèle à la droite OG, le quadrilatère FRF′Φ est inscriptible dans une circonférence de cercle; on a donc

$$\mathrm{GF}.\mathrm{G}\Phi = \mathrm{GR}.\mathrm{GF}' = 4a^2,$$

d'où, par une transformation facile, la relation énoncée ci-dessus.

7. Comme application, proposons-nous, étant donné un point O du plan, de construire un cercle ayant ce point pour centre et dans lequel on puisse inscrire un triangle circonscrit à la conique K.

Construisons le point Φ déterminé par la relation (1), et faisons passer par les points Φ et G un cercle qui touche la droite OG. Ce cercle rencontre la droite OF en deux points F′ et F″ ; de là deux solutions du problème proposé.

En premier lieu, on a comme solution le cercle relativement auquel les points F et F′ sont réciproques, et son

rayon R' est déterminé par la relation

$$R'^2 = OF.OF'.$$

On a comme seconde solution le cercle relativement auquel les points F et F'' sont réciproques, et son rayon R'' est déterminé par la relation

$$R''^2 = OF.O\ ''.$$

8. En faisant le produit des équations précédentes, il vient

$$R'^2 R''^2 = \overline{OF}^2.OF'.OF''.$$

On a d'ailleurs, en vertu d'une propriété du cercle bien connue,

$$OF'.OF'' = OG^2;$$

d'où

$$R'R'' = OF.OG.$$

Ainsi, *le problème proposé a deux solutions et le produit des rayons des cercles qui y satisfont est égal au produit des distances du centre donné aux deux foyers de la conique.*

9. On peut transformer encore d'une autre façon la relation

$$GR \times GF' = 4a^2.$$

Les deux triangles semblables OF'G et FF'R donnent en effet

$$GR = OF \times \frac{GF'}{OF'},$$

d'où la relation

$$\frac{OF.GF'^2}{OF'} = 4a^2.$$

En désignant par R le rayon du cercle, par u et v les

longueurs OF et OG et enfin par ω l'angle FOG, on a

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OF}'}=\frac{u^2}{\mathrm{R}^2},$$

et

$$\mathrm{GF}'^2=\mathrm{OG}^2+\mathrm{OF}'^2-2\,\mathrm{OG}.\mathrm{OF}'\cos\omega=v^2+\frac{\mathrm{R}^4}{u^2}-\frac{2\mathrm{R}^2 v\cos\omega}{u};$$

de là

$$(u^2v^2+\mathrm{R}^4-2\mathrm{R}^2uv\cos\omega)=4a^2\mathrm{R}^2.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle OFG,

$$4c^2=u^2+v^2-2uv\cos\omega,$$

en désignant par $2c$ la distance des foyers F et G.

Éliminant $\cos\omega$ entre les équations précédentes, il vient

$$(\mathrm{R}^2-u^2)(\mathrm{R}^2-v^2)=4b^2\mathrm{R}^2.$$

10. Si l'on suppose que, les foyers F et G venant à coïncider, la conique se réduise à un cercle, en posant

$$u=v=\mathrm{D}\quad\text{et}\quad b=r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$\mathrm{R}^2-\mathrm{D}^2=2\mathrm{R}r,$$

qui, comme on le sait, est due à Euler.

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE CIRCONSCRIT A UN QUADRILATÈRE ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE QUADRILATÈRE;

Par M. LAGUERRE.

---

1. Dans tout ce qui suit, pour abréger les démonstrations, je supposerai que l'on considère une conique et un cercle *réels* (ou du moins dont les équations soient

réelles). Les résultats obtenus s'étendent évidemment au cas où ces courbes seraient imaginaires; il suffirait d'ailleurs de quelques modifications légères pour appliquer au cas général les considérations sur lesquelles je m'appuie.

2. Je supposerai d'abord que la conique donnée soit une parabole P. En désignant par C le cercle donné, on sait, d'après Poncelet, que si l'on peut circonscrire à P un quadrilatère dont les sommets soient situés sur C, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères jouissant de la même propriété. Le sommet d'un de ces quadrilatères peut être pris arbitrairement sur le cercle.

Soit I un des ombilics du plan, les deux tangentes menées de ce point à la parabole sont, d'une part la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'autre ombilic J, et d'autre part la droite FI qui passe par le foyer de la parabole. Les tangentes issues du point J sont la droite de l'infini et la droite FJ. Désignons respectivement par α et β les points où les droites isotropes FI et FJ rencontrent le cercle; il est clair que l'on obtiendra la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, en exprimant que la droite $\alpha\beta$ est tangente à P, ou bien que le symétrique de F relativement à cette droite est sur la directrice de P.

Ce point symétrique est évidemment le point réciproque de F relativement au cercle C; d'où la proposition suivante :

Étant donnés le cercle C *et une parabole* P, *si l'on peut inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, le point réciproque du foyer de* P *relativement au cercle est situé sur la directrice de cette courbe.*

3. On sait (*) que, si l'on considère un quelconque des quadrilatères circonscrits à P et inscrits dans C, le point de rencontre Q des diagonales de ce quadrilatère est fixe et ne dépend pas de la position du quadrilatère considéré; c'est d'ailleurs le point de rencontre de deux cordes communes aux deux courbes.

Si l'on considère, comme précédemment, le quadrilatère IJ$\alpha\beta$, on voit que le point fixe Q est l'intersection des droites isotropes βI et αJ; *ce point est donc le réciproque de* F *relativement au cercle* C, *et il est situé sur la directrice.*

4. En particulier, si d'un point M, pris dans le plan de la parabole, on lui mène deux tangentes qui touchent cette courbe aux points A et B, on sait que l'on peut inscrire dans le cercle déterminé par les trois points M, A et B une infinité de quadrilatères circonscrits à P; on peut donc, relativement à ce cercle, énoncer les propositions suivantes :

Le point réciproque du foyer de P, *relativement au cercle* C *circonscrit au triangle* MAB, *est sur la directrice de* P; *il est le point d'intersection de la corde* AB *commune aux deux courbes, de la corde qui passe par leurs deux autres points de rencontre et de la tangente menée en* M *au cercle* C.

5. Considérons maintenant une conique K quelconque ayant pour foyers réels les points F et G; je désignerai par $2a$ la longueur de l'axe contenant ces foyers, par $2b$ la longueur de l'autre axe, et par $2c$ la distance FG, en sorte qu'entre ces quantités on a, suivant la notation

(*) Poncelet, *Propriétés projectives*, t. I, p. 351.

habituelle, la relation

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Puisque l'on peut incrire dans le cercle C une infinité de quadrilatères circonscrits à la conique K, on peut choisir arbitrairement sur ce cercle le sommet d'un de ces quadrilatères. Prenons l'ombilic I; les tangentes menées de ce point à la conique passent par les foyers F et G et rencontrent respectivement le cercle en deux points α et β; en vertu de la propriété énoncée, il existe sur ce cercle un troisième point δ, tel que les droites $\alpha\delta$ et $\beta\delta$ sont tangentes à la conique K.

Déterminons d'abord le point symétrique de F relativement à $\alpha\delta$. Je mène à cet effet par le point F la droite isotrope du système (I) qui rencontre $\alpha\delta$ au point α, puis par le point α la droite isotrope du système J; je mène en second lieu par le point F la droite isotrope du système J qui rencontre $\alpha\delta$ en un point ε, puis par le point ε la droite isotrope du système I. Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique du point F.

Pour déterminer le segment représentatif de ce point imaginaire, je remarque que les points α, δ et ε sont en ligne droite. Le segment représentatif du point α est FF', si l'on désigne par F' le réciproque du foyer F relativement au cercle C; le segment représentatif du point φ a pour extrémité le point F' et pour origine un point R qu'il s'agit de déterminer. Quant au point δ, comme il se trouve sur le cercle C, il est représenté par un segment DD' dont les extrémités sont deux points réciproques relativement à ce cercle; le point ε a d'ailleurs pour segment représentatif RF.

Puisque les points α, δ et ε sont en ligne droite, les deux triangles FRD et F'FD' sont semblables et inverse-

ment placés, et, le quadrilatère $FF'DD'$ étant inscriptible, on voit immédiatement que le point R est le point de rencontre de $F'D$ avec la droite menée par le point F parallèlement à OD.

6. Semblablement, si l'on désigne par γ le symétrique de G relativement à $\beta\delta$ et par G' le réciproque de G relativement au cercle C, on voit que γ est représenté par le segment SG', en appelant S le point de rencontre de $G'D$ avec la droite menée par le point G parallèlement à OD.

Je ferai remarquer maintenant que, la droite $\alpha\delta$ étant tangente à la conique K, le point φ est situé sur le cercle réel décrit du point G comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite $F'D$ passe par le point G;

2° On a la relation

$$GR.GF' = 4a^2.$$

De même, la droite $\beta\delta$ étant tangente à la conique K, le point γ est situé sur le cercle réel décrit du point F comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite $G'D$ passe par le point F;

2° On a la relation

$$FS.FG' = 4a^2.$$

7. De là résulte que le point D est l'intersection des droites FG' et GF' et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Considérons un cercle* C *et une conique* K *jouissant de la propriété que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la conique; soient* O *le centre du cercle,* F' *et* G' *les points réciproques relativement au cercle des foyers* F *et* G *de*

la conique, D *le point de rencontre des droites* FG′ *et* GF′.

Si l'on désigne par R *le point de rencontre* F′G *avec la droite menée par* O *parallèlement à* OD, *le produit* GR.GF′ *est égal au carré de l'axe de* K *qui contient les foyers* F *et* G.

8. On obtient ainsi la relation

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{GR.GF'} = 4a^2,$$

qu'il est aisé de transformer de façon à ne mettre en évidence que le rayon du cercle et les côtés du triangle OFG.

Soit en effet R le rayon du cercle, et posons, pour abréger,

$$\mathrm{OF} = u, \quad \mathrm{OG} = v, \quad \widehat{\mathrm{FOG}} = \omega,$$
$$\widehat{\mathrm{OFG'}} = \widehat{\mathrm{OGF'}} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{OF'G}} = \widehat{\mathrm{OG'F}} = \beta.$$

La relation (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathrm{GF'(GD + DR)} = 4a^2.$$

Or on a évidemment

$$\mathrm{GF'} = \frac{\mathrm{OF'}.\sin\omega}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{GD} = \mathrm{GG'}.\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

et les deux triangles semblables OF′D et FF′R donnent

$$\mathrm{DR} = \mathrm{OF}\frac{\mathrm{DF'}}{\mathrm{OF'}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OF'}}\;\frac{\mathrm{FF'}\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

En remarquant que

$$\mathrm{OF'} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{R}^2}{u},$$

on déduit de là

$$4a^2 = \frac{\mathrm{R}^2\sin\omega}{u\sin\alpha}\left(\mathrm{GG'}\sin\beta + \frac{u^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{FF'}\sin\alpha\right)\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)};$$

et comme

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OF}{OG'} = \frac{uv}{R^2},$$

$$\begin{aligned} 4a^2 &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}(v.GG' + u.FF') \\ &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}\left[v\left(\frac{R^2}{v} - v\right) + u\left(\frac{R^2}{u} - u\right)\right] \\ &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}(2R^2 - u^2 - v^2). \end{aligned}$$

9. On trouve aisément

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{R^4 - 2R^2uv\cos\omega + u^2v^2}{R^4 - u^2v^2};$$

on en déduit la relation

$$4a^2(R^4 - u^2v^2) = (2R^2 - u^2 - v^2)(R^4 - 2R^2uv\cos\omega + u^2v^2).$$

On a d'ailleurs

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega;$$

en éliminant $\cos\omega$ entre les deux équations qui précèdent, il viendra enfin

$$4a^2(R^4 - u^2v^2) = (2R^2 - u^2 - v^2)[(R^2 - u^2)(R^2 - v^2) + 4c^2R^2].$$

10. Si l'on suppose que la conique se réduise à un cercle, les foyers F et G étant confondus, on devra faire $c = 0$, et en posant

$$u = v = D, \quad a = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$(R^2 - D^2)[2r^2(R^2 + D^2) - (R^2 - D^2)^2] = 0.$$

11. Comme je l'ai rappelé plus haut, si l'on considère un quadrilatère quelconque circonscrit à la co-

nique K et inscrit dans le cercle C, les diagonales de ce quadrilatère se coupent en un point fixe.

Pour déterminer ce point fixe, je considère en particulier le quadrilatère $I\alpha\delta\beta$; le point fixe cherché se trouve sur la droite δI, et, comme il est évidemment réel, il se confond avec le point D. On peut d'ailleurs facilement vérifier que ce point est sur la diagonale $\alpha\beta$; cela résulte immédiatement de la similitude des triangles FDG et F'DG'.

Ainsi :

Le point de rencontre fixe des diagonales des quadrilatères, circonscrits à la conique K *et au cercle* C, *est le point de rencontre des droites* FG' *et* GF'.

12. Les considérations qui précèdent s'appliquent évidemment au cas où le polygone, que l'on peut circonscrire à la conique et inscrire dans le cercle, a un nombre de côtés supérieur à quatre ; mais les résultats deviennent alors beaucoup plus compliqués, et je me contenterai d'examiner le cas particulier où, la conique étant une parabole P, on peut lui circonscrire un pentagone inscrit dans un cercle C.

Si nous prenons pour sommet de ce pentagone l'ombilic I, des deux tangentes que l'on peut de ce point mener à la parabole, l'une est la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'ombilic J, l'autre coupe le cercle en un point α. Par l'ombilic J, on peut mener à P une tangente distincte de la droite de l'infini ; je désignerai par β le point où elle rencontre C. Cela posé, il est clair que si l'on peut inscrire dans le cercle un pentagone circonscrit à la parabole, les tangentes à ce cercle, menées par les points α et β (et distinctes des droites isotropes αI et βJ), doivent se couper en un point γ de ce cercle. D'ailleurs, les points α et β étant évidemment *imaginairement con-*

jugués, il en est de même de ces deux tangentes; le *point* γ *est donc réel.*

Nous devons maintenant exprimer que la droite $\alpha\gamma$ est tangente à la parabole.

A cet effet, je remarque que le point α est représenté par le segment FF′, si l'on appelle F le foyer de la parabole et F′ son réciproque relativement au cercle. Cherchons le symétrique de F relativement à la droite $\alpha\gamma$; pour cela, je considère la droite isotrope du système J qui passe par le point α, puis par le point F je mène la droite isotrope du même système qui rencontre $\alpha\gamma$ en un point ε; enfin par le point ε je mène la droite isotrope du système I.

Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique cherché, et le segment représentatif de φ est RF′, si l'on désigne par R le point réel situé sur la droite εI.

13. D'ailleurs, les points α, ε et γ étant en ligne droite, les deux triangles FF′γ et RFγ sont semblables, et par suite le point R est le point d'intersection de F′γ par la droite menée par F parallèlement à Oγ.

Si maintenant on remarque que le point φ, représenté par le segment RF′, est sur la directrice de la parabole, on en conclut d'autre part que R est le symétrique de F′ relativement à cette directrice.

D'où la proposition suivante :

Soit donnée une parabole à laquelle on peut circonscrire un pentagone inscrit dans le cercle; construisons le point F′, *réciproque par rapport au cercle, du foyer* F *de la parabole, puis le point* R *symétrique du point* F′ *par rapport à la directrice de cette parabole; cela posé, le point de rencontre de* F′R *avec la droite*

menée par le centre du cercle parallèlement à FR *est situé sur le cercle.*

14. Si l'on désigne par γ ce point de rencontre, par O le centre du cercle et r son rayon, les deux triangles semblables FF′R et OF′γ donnent la proportion

$$\frac{O\gamma}{FR} = \frac{OF'}{OF'F};$$

et comme

$$OF' = \frac{r^2}{OF}, \quad \text{et} \quad O\gamma = r,$$

on en déduit la relation suivante :

$$r^2 - OF^2 = r.FR.$$

15. En terminant cette Note, je ferai encore remarquer avec quelle facilité les considérations dont j'ai fait usage conduisent au beau théorème de M. Faure, relativement aux triangles conjugués par rapport à une conique.

Considérons, en effet, un cercle circonscrit à un triangle conjugué relatif à une conique K ; on sait que l'on peut, dans ce cercle, inscrire une infinité d'autres triangles jouissant de la même propriété. Prenons l'ombilic I comme sommet d'un de ces triangles, et soient α et β les points de rencontre de K avec la polaire de cet ombilic ; ces points sont évidemment sur le cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, en sorte que, en désignant par O le centre de K, et par a et b les demi-axes de cette conique, on a la relation

$$O\beta^2 = O\alpha^2 = a^2 + b^2.$$

Soient γ et δ les deux autres sommets du triangle conjugué dont le premier sommet est I ; par définition, les points γ et δ se trouvent sur la droite $\alpha\beta$ et divisent har-

moniquement le segment $\alpha\beta$; on a donc

$$O\gamma . O\delta = O\alpha^2 = a^2 + b^2,$$

et, comme $O\gamma . O\delta$ est évidemment la puissance du centre O relativement au cercle C, le théorème est démontré.

THEORIE DES TÉLESCOPES GRÉGORY ET CASSEGRAIN;

PAR M. MACÉ DE LÉPINAY,

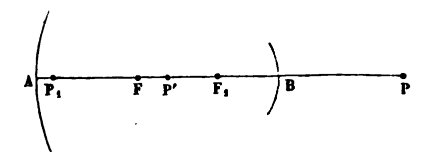
Professeur au lycée de Marseille.

On peut donner de ces instruments une théorie très-simple, en employant la formule connue $\varphi\varphi' = f^2$. Cette théorie a de plus l'avantage de s'appliquer à la fois aux deux instruments.

J'étudierai, à cet effet, tout d'abord le télescope Grégory.

1° *Combinaison de deux miroirs sphériques concaves.* — Soient A et B les deux miroirs, f, f_1 leurs deux distances focales, d la distance de leurs deux foyers (d est négatif lorsque les deux foyers sont croisés). Considé-

Fig. 1.



rons un point lumineux sur l'axe commun, en P, $PF = \varphi$. Par réflexion sur le miroir A, ce point P donnera une première image P', par exemple, que je supposerai tomber entre les deux foyers, et la distance $\varphi' = FP'$ sera

donnée par

$$\varphi' = \frac{f^2}{\varphi}.$$

On en déduit

$$P'F_1 = \varphi'' = d - \frac{f^2}{\varphi},$$

d'où, pour $P_1E_1 = \varphi_1$,

$$\varphi_1 = \frac{f_1^2}{d - \frac{f^2}{\varphi}},$$

relation qui peut se mettre sous la forme

$$d = \frac{f^2}{\varphi} + \frac{f_1^2}{\varphi_1}.$$

Cette formule très-simple, ne contenant que les carrés des distances focales, est générale et s'applique également au cas où l'un des miroirs, ou même tous les deux, seraient convexes. Comme dans la théorie des lentilles de Gauss, l'objet et son image se trouvent rapportés à deux points différents de l'axe.

2° *Application au télescope Grégory*. — Si le système des miroirs fait partie d'un télescope, on peut supposer $\varphi = \infty$, et l'on a simplement

$$d = \frac{f_1^2}{\varphi_1},$$

relation que l'on peut trouver d'ailleurs directement, en remarquant que la première image se fait en F.

Cherchons comment on doit régler les deux miroirs l'un par rapport à l'autre, pour que l'image observée vienne se faire dans le plan focal de l'oculaire (en supposant l'œil infiniment presbyte).

Désignons, à cet effet, par δ la distance du plan focal de l'oculaire au foyer du miroir A; on devra avoir

$\varphi_1 = d + \delta$. En remplaçant φ_1 par cette valeur dans $d\varphi_1 = f_1^2$, on obtient l'équation de condition

$$d^2 + \delta d - f_1^2 = 0,$$

$$(1) \qquad d = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + f_1^2}.$$

Quant à la distance vraie des deux miroirs, dans le cas du télescope Grégory, elle sera

$$d + f + f_1.$$

Cette solution très-simple permet de construire géométriquement la position du foyer du miroir mobile.

Soient, à cet effet, F le foyer du miroir fixe, C le foyer

Fig. 2.

F₂ C O F F₁ F′₁

de l'oculaire, O le milieu de CF. La relation ci-dessus peut s'écrire

$$\left(d + \frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + f_1^2.$$

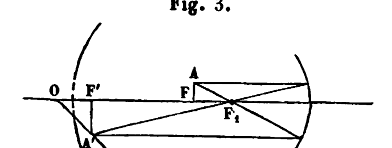
Élevons en F une perpendiculaire $FF'_1 = f_1$ à l'axe. Dans le triangle OFF'_1, on aura $d + \frac{\delta}{2} = OF'_1$. Or $d + \frac{\delta}{2}$ représente précisément la distance à O du foyer cherché. Il suffira donc de rabattre sur l'axe F'_1 en F_1 pour avoir le foyer du miroir mobile.

La construction indiquée revient à prendre dans l'équation (1) le signe + du radical. Il est évident qu'en prenant le signe —, ce qui reviendrait à rabattre F'_1 en F_2, le miroir mobile pourrait, si les conditions du problème sont convenables, tomber au delà du miroir

fixe, c'est-à-dire que la deuxième réflexion serait impossible. Dans tous les cas, la solution indiquée répond seule à la pratique.

3° *Grossissement*. — Soit a la grandeur de l'image obtenue au foyer F du miroir fixe, le diamètre apparent de l'objet est $\frac{a}{f}$. Soient, d'autre part, b l'image A'F' formée dans le plan focal de l'oculaire; si F est la distance

Fig. 3.



focale de ce dernier, $\frac{b}{\mathrm{F}}$ sera le diamètre apparent observé. Le grossissement sera donc

$$g = \frac{b}{a}\frac{f}{\mathrm{F}}.$$

Mais le rapport $\frac{b}{a}$ de l'image donnée par le second miroir a pour valeur, d'après une formule connue à l'objet,

$$\frac{b}{a} = \frac{f_1}{p - f_1} = \frac{f_1}{d}.$$

On a donc pour le grossissement

$$(12) \qquad g = \frac{ff_1}{d\mathrm{F}}.$$

L'image est ici redressée par rapport à l'objet.

4° *Télescope Cassegrain*. — On remplace le petit miroir concave par un miroir convexe.

Réglage de l'appareil. — Les formules employées pour arriver à la relation (1) étant indépendantes de la forme du miroir, convexe ou concave, cette relation est

applicable dans le cas du télescope Cassegrain, ainsi que la construction géométrique indiquée.

Grossissement. — La même remarque s'applique ici; mais il faut changer le signe de f_1. Tandis que la formule (1) n'est pas modifiée, le grossissement du télescope Cassegrain devient

$$g = -\frac{ff_1}{d\mathrm{F}}.$$

Ce changement de signe indique que l'image est, dans ce cas, renversée par rapport à l'objet.

On voit, en résumé, que si l'on imagine deux télescopes Grégory et Cassegrain, tels que les quatre quantités f, f_1, F, δ soient les mêmes, on devra disposer de même le foyer du miroir mobile, et, de plus, le grossissement sera le même dans les deux instruments.

NOTE SUR TROIS RÈGLES DE MULTIPLICATION ABRÉGÉE, EXTRAITES DU « TALKHYS AMALI AL HISSAB » (*);

PAR M. ARISTIDE MARRE.

Le *Talkhys amâli al hissàb* (Résumé analytique des opérations du Calcul) d'IBN AL BANNA, de Maroc, renferme, au chapitre de la multiplication des nombres entiers, quelques procédés d'abréviation à l'aide desquels on obtient rapidement, dans certains cas particuliers, le produit de la multiplication de deux nombres entiers. Comme ces procédés méritent d'être connus et ne se

---

(*) La traduction complète du *Talkhys amâli al hissàb* d'Ibn al Banna le Marocain, par M. Aristide MARRE, a paru d'abord dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XVII, 1864. Elle a été publiée en 1865, à Rome, à l'Imprimerie des Sciences mathématiques et physiques, par les soins du Prince Balthasar Boncompagni.

rencontrent dans aucun *Traité d'Arithmétique* (bien que le *Talkhys* les ait donnés il y a près de six siècles), il me semble utile de les mettre sous les yeux de la jeunesse studieuse qui lit les *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Première règle. — Soit à multiplier par lui-même un nombre composé de chiffres tous égaux à l'unité, par exemple :

$$11111 \times 11111.$$

Je dis que le produit sera

$$123454321.$$

Règle. — Il suffit d'écrire le nombre des chiffres de l'un des facteurs et de le flanquer symétriquement, à sa gauche et à sa droite, de la suite naturelle décroissante des chiffres moindres que lui. Ainsi, pour l'exemple proposé, il suffira d'écrire 5, nombre des chiffres de l'un quelconque des facteurs, et de le flanquer symétriquement à gauche et à droite, de la suite naturelle décroissante des chiffres moindres que 5, c'est-à-dire de 4, 3, 2, 1, comme ci-dessous,

$$123454321.$$

Autre exemple. — Soit 1111111 à multiplier par 1.111.111.

Le produit sera formé immédiatement en écrivant symétriquement à gauche et à droite du chiffre 7, qui indique le nombre des chiffres de l'un quelconque des facteurs, la suite naturelle décroissante des chiffres 6, 5, 4, 3, 2, 1, comme ci-dessous :

$$1234567654321.$$

Autre exemple. — Si l'on proposait de multiplier 11 par 11, l'application de la règle donnerait immédiatement

$$121.$$

Deuxième règle. — Soit à multiplier par lui-même un nombre composé de chiffres tous égaux à 9, par exemple 99999 par 99999.

Je dis que le produit sera

9999800001.

Règle. — Il suffit d'écrire le chiffre 8, de le flanquer à gauche d'autant de 9 et à droite d'autant de 0 qu'il y a de chiffres moins un dans l'un quelconque des facteurs, puis d'écrire, à l'extrême droite du nombre qui en résulte, le chiffre 1.

Ainsi, dans l'exemple proposé

$99999 \times 99999,$

il suffit d'écrire le chiffre 8, de le flanquer à gauche de (5 — 1) ou 4 chiffres égaux à 9, et à droite de (5 — 1) ou 4 chiffres égaux à 0, comme il suit :

999980000,

puis d'écrire à l'extrême droite de ce nombre le chiffre 1; on a ainsi le produit

9999800001.

Autre exemple. — Soit 9999999 à multiplier par 9999999.

A gauche du chiffre 8, j'écris (7 — 1) ou 6 chiffres tous égaux à 9, et à sa droite 6 chiffres tous égaux à 0,

9999998000000,

puis à l'extrême droite de ce nombre, je pose le chiffre 1, et j'ai ainsi le produit demandé

99999980000001.

Autre exemple. — Si l'on proposait de multiplier 9 par 9, le produit, en appliquant la règle, serait 81.

Dans ce cas, en effet, le nombre des chiffres de l'un quelconque des facteurs étant 1, ce nombre, diminué

de 1, devient égal à 0, et cela signifie que le chiffre 8 apparaît ici sans son escorte habituelle de 9 à gauche et de 0 à droite, et seulement accompagné du chiffre 1 des unités.

TROISIÈME RÈGLE. — Soit à multiplier un nombre composé de chiffres tous égaux à 9 par un nombre composé de chiffres tous égaux entre eux, mais tous différents de 9; par exemple :

$$999 \times 666.$$

Je dis que le produit sera 665334.

Règle. — On fait d'abord le produit du chiffre du multiplicande par le chiffre du multiplicateur, le chiffre des unités de ce produit préliminaire sera le chiffre des unités du produit demandé; quant au chiffre des dizaines de ce même produit préliminaire, il devra être flanqué à gauche d'autant de fois le chiffre du multiplicateur qu'il y a de chiffres moins un dans l'un quelconque des facteurs proposés, et à droite d'un même nombre de chiffres tous égaux à la différence entre le chiffre (9) du multiplicande et le chiffre du multiplicateur. C'est à l'extrême droite du nombre ainsi obtenu qu'on écrira le chiffre des unités du produit préliminaire, et l'on aura ainsi le produit demandé.

Exemple proposé :

$$999 \times 666.$$

Le produit préliminaire 9×6 étant 54, il suffit d'écrire à la gauche du chiffre (5) des dizaines autant de fois le chiffre (6) du multiplicateur qu'il y a de chiffres moins un dans l'un ou l'autre facteur, c'est-à-dire deux fois le chiffre (6), et à sa droite deux fois le chiffre (3) qui exprime la différence (9 — 6), ainsi :

66533,

puis de compléter ce nombre, en écrivant à l'extrême

droite le chiffre (4) des unités du produit préliminaire (54), et l'on aura ainsi, pour le produit cherché,

665334.

Autre exemple. — Soit 9999999 à multiplier par 3333333.

Le produit préliminaire étant 27, et le nombre des chiffres de l'un quelconque des facteurs étant 7, il faut écrire à gauche du chiffre (2) des dizaines du produit préliminaire (7 — 1) ou 6 chiffres tous égaux au chiffre (3) du multiplicateur :

3333332,

puis, à droite de ce même chiffre (2) des dizaines du produit préliminaire, 6 chiffres tous égaux à la différence (9 — 3) ou 6 des chiffres des deux facteurs, ainsi :

3333332666666,

et enfin poser à l'extrême droite du nombre ci-dessus le chiffre (7) des unités du produit préliminaire 27, ce qui donne, pour le produit définitif, le nombre

33333326666667.

Autre exemple. — Soit 99 à multiplier par 22.

Le produit préliminaire étant 18 et chaque facteur proposé ayant deux chiffres, il suffira d'écrire à gauche du chiffre (1) des dizaines une seule fois le chiffre (2) du multiplicatèur, et à sa droite une seule fois le chiffre (7), qui exprime la différence entre 9 et 2,

217,

puis de faire suivre ce nombre du chiffre (8) des unités du produit préliminaire.

Le produit demandé sera donc

2178.

La règle se vérifiera pour le cas où chacun des facteurs n'aurait qu'un chiffre. Si l'on proposait, par exemple, d'appliquer la règle au cas

$$9 \times 2 = 18,$$

le produit préliminaire serait en même temps le produit final, puisque le chiffre (1) des dizaines devrait avoir (1 — 1) fois ou zéro fois, à sa gauche et à sa droite, ses compagnons habituels, et réduit ainsi à lui-même devrait être uniquement suivi du chiffre (8) des unités.

Observation. — Il est facile de reconnaître que la deuxième règle peut être considérée comme un cas particulier de la troisième règle : celui où la différence entre le chiffre du multiplicande et le chiffre du multiplicateur devient égale à zéro.

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$aX^m + bY^m = cZ^n$ (*);

PAR M. DESBOVES.

I. — *Objet du Mémoire.*

1. Les géomètres, qui jusqu'ici se sont occupés de la résolution en nombres entiers des équations à plusieurs

(*) m, n, a, b, c sont des nombres entiers donnés dont les deux premiers ont toujours des valeurs positives, X, Y, Z désignent les trois inconnues, et (x, y, z) représentera toujours, dans la suite, la solution de l'équation

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z.$$

inconnues, ont surtout cherché les cas où les équations étaient impossibles; ce sont, au contraire, les cas de possibilité qui doivent être traités ici. Laissant de côté le cas où m est égal à 2, quel que soit n, je me propose de trouver des formes générales de a, b, c telles, que l'équation (1) puisse être résolue en nombres entiers. Je ferai voir, en particulier, que, a et b ayant des valeurs arbitraires, on pourra toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que cette résolution soit possible. Il est clair que, si l'on admettait pour Z la valeur 1, la dernière question serait immédiatement résolue, puisque, si c est de la forme $ax^m + by^m$, on a immédiatement la solution $(x, y, 1)$; mais ce n'est point d'une pareille solution qu'il s'agira par la suite. De plus, lorsque l'équation à résoudre aura une infinité de solutions, je donnerai des formules qui permettront de déduire d'une première solution une deuxième, de celle-ci une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

Avant que le cas général soit abordé, les cas particuliers où, m étant égal à 3 ou 4, n est égal à 2, 3, 4, ..., seront successivement traités.

2. La seule méthode suivie dans tout le cours du Mémoire est fondée sur l'emploi de certaines identités, dont quelques-unes sont intuitives, mais qui, pour la plupart, seront démontrées d'après les principes exposés par Lagrange dans le Chapitre IX des Additions à l'*Algèbre* d'Euler. Le grand géomètre termine ainsi ce Chapitre : « Mais en voilà assez sur ce sujet, que nous pourrons peut-être reprendre dans une autre occasion ». Dans un Mémoire qui a pour titre : *De quelques problèmes de l'Analyse de Diophante,* il ajoute encore ces mots : « Au reste, la méthode la plus simple et la plus générale pour résoudre ces sortes d'égalités (il s'agit de

la résolution en nombres entiers des équations à trois inconnues) est peut-être celle des facteurs, que j'ai exposée dans le dernier Chapitre des Additions à l'*Algèbre* d'Euler ». Lagrange n'ayant pas tenu la promesse qu'il avait faite, j'ai essayé de deviner quelques-uns des développements qu'il aurait pu ajouter à son Chapitre IX. J'espère qu'on voudra bien me pardonner la témérité de ma tentative en faveur de quelques résultats nouveaux auxquels je suis parvenu.

II. — *Démonstration de quelques identités fondamentales.*

3. Les identités dont il s'agit seront obtenues en cherchant des fonctions du second, du troisième ou du quatrième degré, dans lesquelles le nombre des variables soit toujours égal au degré, et telles que, en multipliant deux fonctions de même espèce, on trouve un produit de même espèce que ses deux facteurs. On indiquera ensuite le moyen général d'obtenir des identités correspondant à des fonctions d'un degré quelconque.

Bien que la résolution des équations dans lesquelles m est égal à 2 soit exclue de ce travail, je donne les identités qui se rapportent aux fonctions du second degré, parce qu'elles serviront à trouver des identités d'un degré supérieur.

4. *Identités résultant de la considération des fonctions du second degré à deux variables.* — Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *Si l'on multiplie une fonction du second degré* $x^2 + axy + by^2$ *par une fonction de même espèce* $x_1^2 + ax_1y_1 + by_1^2$, *on obtient toujours une*

fonction $X^2 + aXY + bY^2$ *de même espèce que les deux autres.*

En effet, si l'on désigne par α, β les racines de l'équation du second degré

$$(1) \qquad \frac{x^2}{y^2} + a\frac{x}{y} + b = 0,$$

dans laquelle $\frac{x}{y}$ est l'inconnue, on a

$$\begin{aligned} x^2 + axy + by^2 &= y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + a\frac{x}{y} + b\right) \\ &= y^2\left(\frac{x}{y} - \alpha\right)\left(\frac{x}{y} - \beta\right) = (x - \alpha y)(x - \beta y, \end{aligned}$$

et de même

$$x_1^2 + ax_1y_1 + by_1^2 = (x_1 - xy_1)(x_1 - \beta y_1).$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} (x - \alpha y)(x_1 - \alpha y_1) &= xx_1 + \alpha^2 yy_1 - \alpha(xy_1 + yx_1) \\ &= xx_1 - byy_1 - \alpha(xy_1 + yx_1 + ayy_1), \end{aligned}$$

la dernière expression étant déduite de la précédente en remplaçant dans celle-ci α^2 par $-a\alpha - b$.

Si maintenant on pose

$$(2) \qquad X = xx_1 - byy_1, \quad Y = xy_1 + yx_1 + ayy_1,$$

il vient

$$(x - \alpha y)(x_1 - \alpha y_1) = X - \alpha Y,$$

et l'on a de même

$$(x - \beta y)(x_1 - \beta y_1) = X - \beta Y.$$

Alors, si l'on multiplie, membre à membre, les deux dernières égalités, on obtient l'identité

$$(3) \quad X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)(x_0^2 + ax_1y_1 + by_1^2),$$

qui démontre le théorème énoncé.

Ce théorème peut évidemment être étendu à un nombre quelconque de fonctions du second degré de même espèce. En effet, si l'on multiplie $X^2 + aXY + bY^2$, produit des deux premières fonctions par $x_2^2 + ax_2y_2 + by_2^2$, d'après le théorème démontré, le produit sera de la forme $X_1^2 + aX_1Y_1 + bY_1^2$, les fonctions X_1, Y_1 étant obtenues comme il suit. On remplace d'abord dans les formules (2) X, x, x_1, Y, y, y_1 respectivement par X_1, X, x_2, Y_1, Y, y_2, et l'on a ainsi

$$(4)\qquad X_1 = Xx_2 - bYy_2, \quad Y_1 = Xy_2 + Yx_2 + aYy_2;$$

il ne reste plus alors qu'à substituer, dans ces dernières formules, à X et Y les expressions que donnent les formules (2). On pourra de même passer du cas de trois facteurs à celui de quatre facteurs, et ainsi de suite; mais nous voulons seulement nous arrêter au cas des facteurs égaux.

Si l'on considère d'abord le cas de deux facteurs égaux, on fait, dans les équations (2) et (3), $x_1 = x$, et, en posant

$$(5)\qquad Z = x^2 + axy + by^2,$$

on a l'identité

$$(6)\qquad X^2 + aXY + bY^2 = Z^2,$$

X et Y étant données par les formules

$$(7)\qquad X = x^2 - by^2, \quad Y = 2xy + ay^2.$$

Pour passer maintenant au cas de trois facteurs, il suffit de remplacer, dans les formules (4), x_2, y_2 par x, y et X, Y par les expressions que donnent les formules (7); on a ainsi

$$(8)\qquad \begin{cases} X_1 = x^3 - 3bxy^2 - aby^3, \\ Y_1 = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3, \end{cases}$$

et l'identité

$$(9) \qquad X_1^2 + aX_1Y_1 + bY_1^2 = Z^3$$

est satisfaite par les valeurs de X_1, Y_1, Z que donnent les formules (8) et (5).

Traitons enfin le cas de quatre facteurs égaux. A cet effet, on remplace d'abord, dans les formules (2), X, x, x_1, Y, y, y_1 respectivement par X_2, X_1, x, Y_2, Y_1, y, puis, dans les formules ainsi obtenues, X_1, Y_1 par les valeurs que donnent les formules (8); on a ainsi

$$(10) \quad \begin{cases} X_2 = x^4 - 4ab\,xy^3 - 6bx^2y^2 - b(a^2 - b)y^4, \\ Y_2 = 4x^3y + 4(a^2 - b)xy^3 + 6ax^2y^2 + a(a^2 - 2b)y^4, \end{cases}$$

et l'on satisfait à l'identité

$$(11) \qquad X_2^2 + aX_2Y_2 + bY_2^2 = Z^4$$

par les valeurs précédentes de X_2, Y_2, et toujours par la valeur de Z que donne la formule (5).

5. *Identités résultant de la considération des fonctions du troisième degré à trois variables.* — En suivant une méthode toute semblable à la précédente, Lagrange démontre que, si l'on multiplie entre elles des fonctions du troisième degré à trois variables de la forme

$$\begin{aligned} &x^3 + cy^3 + c^2z^3 + (ab - 3c)xyz + ax^2y + bxy^2 + acy^2z \\ &\quad + bcyz^2 + (a^2 - 2b)x^2z + (b^2 - 2ac)xz^2, \end{aligned}$$

on obtient toujours une fonction de même forme. Mais, si l'on fait, dans cette expression, a et b nuls, elle se réduit à

$$x^3 + cy^3 + c^2z^3;$$

or, comme il n'est besoin ici que d'expressions de cette forme, pour simplifier les calculs, je modifierai la marche suivie par Lagrange.

λ et μ étant les racines cubiques imaginaires de l'unité, faisons le produit des trois facteurs $x+\lambda y+\lambda^2 z$, $x+\mu y+\mu^2 z$, $x+y+z$. Les deux premiers facteurs, après que l'on y a remplacé λ et μ par leurs valeurs, deviennent

$$\frac{1}{2}\left[2x-y-z+(y-z)\sqrt{-3}\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[2x-y-z-(y-z)\sqrt{-3}\right],$$

et ont pour produit

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz.$$

En multipliant ensuite ce dernier produit par

$$x+y+z,$$

on a, pour le produit des trois facteurs,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz;$$

on obtient donc l'identité

$$(x+\lambda y+\lambda^2 z)(x+\mu y+\mu^2 z)(x+y+z) \\ = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Si maintenant on désigne par α, β, γ les trois racines cubiques d'un nombre quelconque r, on a

$$\alpha=\lambda\gamma, \quad \beta=\mu\gamma,$$

et alors, en changeant dans l'identité précédente y et z en γy et $\gamma^2 z$, on a la nouvelle identité

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z) \\ &\quad = x^3+ry^3+r^2z^3-3rxyz. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'on multiplie entre elles deux*

expressions de même forme que le second membre de l'identité (12), *on obtient encore une expression de même forme.*

En effet, si l'on change x, y, z en x_1, y_1, z_1 dans l'identité (12) et que l'on multiplie, membre à membre, cette identité et celle qu'on en a déduit, on aura, dans le second membre de la nouvelle équation, l'indication du produit de deux fonctions de la forme considérée. Pour obtenir ensuite le développement de ce produit, on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}&(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x_1+\alpha y_1+\alpha^2 z_1)\\&\quad = xx_1 + r(yz_1+zy_1)+(xy_1+yx_1+rzz_1)\alpha\\&\qquad + (xz_1+zx_1+yy_1)\alpha^2;\end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$(13)\quad \begin{cases} X = xx_1 + r(yz_1+zy_1), \quad Y = xy_1+yx_1+rzz_1,\\ \qquad U = xz_1+zx_1+yy_1,\end{cases}$$

il vient

$$X+\alpha Y+\alpha^2 U = (x+\alpha y+\alpha^2 z)(x_1+\alpha y_1+\alpha^2 z_1).$$

On a de même

$$\begin{aligned}X+\beta Y+\beta^2 U &= (x+\beta y+\beta^2 z)(x_1+\beta y_1+\beta^2 z_1),\\ X+\gamma Y+\gamma^2 Z &= (x+\gamma r+\gamma^2 z)(x_1+\gamma y_1+\gamma^2 z_1);\end{aligned}$$

alors, en multipliant, membre à membre, les trois dernières équations, on a l'identité

$$(14)\quad \begin{cases} X^3 + rY^3 + r^2U^3 - 3rXYU\\ \quad = (x^3+ry^3+r^2z^3-3rxyz)\\ \qquad \times (x_1^3+ry_1^3+r^2z_1^3-3rx_1y_1z_1)\end{cases}$$

qui démontre le théorème énoncé.

Si dans l'identité précédente on fait x_1, y_1, z_1 respec-

tivement égaux à x, y, z et que l'on pose

(15) $$Z = x^3 + ry^3 + r^2z^3 - 3rxyz,$$

on voit que l'on satisfera à l'équation

(16) $$X^3 + rY^3 + r^2U^3 - 3XYU = Z^2,$$

en déterminant Z par la formule (15) et X, Y, U par les formules

(17) $$X = x^2 + 2ryz, \quad Y = 2xy + rz^2, \quad U = 2xz + y^2,$$

que l'on déduit des formules (13) en y faisant x_1, y_1, z_1 respectivement égaux à x, y, z.

Maintenant, si l'on veut satisfaire à l'équation

(18) $$X_1^3 + rY_1^3 + r^2U_1^3 - 3rX_1Y_1U_1 = Z^3,$$

Z étant toujours donnée par la formule (15), on prendra les expressions de X_1, Y_1, U_1 déterminées par les formules suivantes :

(19) $$\left\{\begin{aligned} X_1 &= x^3 + ry^3 + r^2z^3 + 6rxyz,\\ Y_1 &= 3(x^2y + rxz^2 + ry^2z),\\ U_1 &= 3(x^2z + xy^2 + ryz^2),\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit des formules (13) en y remplaçant d'abord $X, x, x_1, \ldots$ par $X_1, X, x, \ldots$, puis X, Y, U par les expressions (17).

Enfin on satisfera à l'équation

(20) $$X_2^3 + rY_2^3 + r^2U_2^3 - 3rX_2Y_2U_2 = Z^4,$$

Z étant encore déterminée par la formule (15), en prenant

(21) $$\left\{\begin{aligned} X_2 &= x^4 + 4rxy^3 + 4r^2xz^3 + 12rx^2yz + 6r^2y^2z^2,\\ Y_2 &= ry^4 + 4x^3y + 4r^2yz^3 + 12ry^2xz + 6rx^2z^2,\\ U_2 &= r^2z^4 + 4x^3z + 4rzy^3 + 12z^2xy + 6x^2y^2.\end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules s'obtiennent de la même manière que les précédentes, c'est-à-dire en remplaçant dans les formules (13) $X, x, x_1, \ldots$ par $X_2, X_1, x, \ldots$, puis X_1, Y_1, U_1 par les expressions (19).

6. *Identités résultant de la considération de certaines fonctions du quatrième degré à quatre variables.* — λ, μ, ν, ρ étant les quatre racines quatrièmes de l'unité, on multiplie les facteurs

$$x + \lambda y + \lambda^2 z + \lambda^3 u, \quad x + \mu y + \mu^2 z + \mu^3 u,$$
$$x + \nu y + \nu^2 z + \nu^3 u, \quad x + \rho y + \rho^2 z + \rho^3 u,$$

ou

$$x - z + (y - u)\sqrt{-1}, \quad x - z - (y - u)\sqrt{-1},$$
$$x + z + y + u, \quad x + z - y - u,$$

et l'on obtient pour produit la fonction

$$x^4 - y^4 + z^4 - u^4 - 2x^2 z^2$$
$$+ 2y^2u^2 - 4x^2yu - 4z^2yu + 4y^2xz + 4u^2xz.$$

Employant ensuite le même procédé que celui qui a donné le second membre de l'identité (12), on déduit de la fonction précédente celle-ci, qui est plus générale :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^4 - ry^4 + r^2z^4 - r^3u^4 - 2rx^2z^2 + 2r^2y^2u^2 \\ \quad - 4rx^2yu - 4r^2z^2yu + 4ry^2xz + 4r^2u^2xz, \end{array} \right.$$

et l'on démontre, de la même manière que le théorème II, le théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'on multiplie entre elles deux fonctions du quatrième degré de la forme* (22), *on obtient pour produit une fonction de la même forme.*

En d'autres termes, si l'on pose

$$(23)\qquad \begin{cases} X = xx_1 + rzz_1 + ryu_1 + ruy_1, \\ Y = xy_1 + yx_1 + rzu_1 + ruz_1, \\ U = xz_1 + zx_1 + yy_1 + ruu_1, \\ V = xu_1 + ux_1 + yz_1 + zy_1, \end{cases}$$

on a l'identité

$$(24)\qquad \begin{cases} X^4 - rY^4 + r^2U^4 - r^3V^4 - 2rX^2U^2 + 2r^2Y^2V^2 \\ \quad - 4rX^2YV - 4r^2U^2YV + 4rY^2XU + 4r^2V^2XU \\ \quad = (x^2 - ry^4 + \dots)(x_1^4 - ry_1^4 + \dots). \end{cases}$$

Supposons maintenant que, dans les formules (23) et dans l'identité (24), on fasse x_1, y_1, z_1, u_1 respectivement égaux à x, y, z, u et que l'on pose

$$(25)\qquad \begin{cases} Z = x^4 - ry^4 + r^2z^4 - r^3u^4 - 2rx^2z^2 \\ \qquad + 2r^2y^2u^2 - 4rx^2yu - 4r^2z^2yu \\ \qquad + 4ry^2xz + 4r^2u^2xz, \end{cases}$$

on voit que l'on satisfait à l'identité

$$(26)\qquad X^4 - rY^4 + r^2U^4 + r^3V^4 - 2rX^2U^2 + \dots = Z^2,$$

en prenant l'expression de Z (25) et en déterminant X, Y, U, V par les formules

$$(27)\qquad \begin{cases} X = x^2 + rz^2 + 2ryu, \\ Y = 2(xy + rzu), \\ U = 2xz + y^2 + ru^2, \\ V = 2(xu + yz). \end{cases}$$

Si l'on veut maintenant satisfaire à l'équation

$$(28)\qquad X_1^4 - rY_1^4 + r^2U_1^4 - r^3V_1^4 - 2rX_1^2U_1^2 + \dots = Z^3,$$

on prendra toujours l'expression de Z (25), et l'on aura

$$(29)\quad \begin{cases} X_1 = 3rxz^2 + 3ry^2z + 3r^2zu^2 + 6rxyu + x^3, \\ Y_1 = 3x^2y + 3ryz^2 + 3ry^2u + 6rxzu + r^2u^3, \\ U_1 = 3x^2z + 3xy^2 + 3rxu^2 + 6ryzu + rz^3, \\ V_1 = 3x^2u + 3rz^2u + 3ryu^2 + 6xyz + y^3. \end{cases}$$

Ces dernières formules se déduisent facilement des formules (23) et (27).

Nous ne donnerons pas ici les expressions générales de X_2, Y_2, U_2, V_2 satisfaisant à l'équation

$$(30)\qquad X_2^4 - rY_2^4 + \ldots = Z^4,$$

parce que ces expressions sont compliquées et qu'elles ne seront pas employées dans ce travail, du moins dans leur généralité.

7. *Généralisation des résultats précédents.*

La question générale que nous nous proposons de résoudre est celle-ci : α, β, γ, ... étant les racines de l'équation

$$(31)\qquad \xi^m - r = 0,$$

et x_0, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, m quantités quelconques, trouver l'expression du produit des m fonctions

$$x_0 + x_1\alpha + x_2\alpha^2 + \ldots + x_{m-1}\alpha^{m-1},$$
$$x_0 + x_1\beta + x_2\beta^2 + \ldots + x_{m-1}\beta^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on pose

$$x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \ldots + x_{m-1}\xi^{m-1} = \pi,$$

et que l'on élimine ξ entre l'équation (31) et la précédente, on aura une équation du degré m en π, dans laquelle le terme indépendant de cette variable sera, à un

facteur constant près K, le produit demandé que nous désignerons par P. Il s'ensuit que KP sera le résultat de l'élimination de ξ entre l'équation (31) et l'équation

$$(32) \qquad x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \ldots + x_{m-1}\xi^{m-1} = 0.$$

Pour faire cette élimination, multiplions m fois par ξ les deux membres de l'équation (32), mais en ayant soin, après chaque multiplication, de remplacer ξ^{m+1} par la quantité $r\xi$, qui lui est égale en vertu de l'équation (31). On est alors ramené à éliminer m inconnues $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots, \xi^m$ entre les m équations homogènes du premier degré

$$(33) \quad \begin{cases} x_0\xi + x_1\xi^2 + \ldots + x_{m-2}\xi^{m-1} + x_{m-1}\xi^m = 0, \\ rx_{m-1}\xi + x_0\xi^2 + \ldots + x_{m-3}\xi^{m-1} + x_{m-2}\xi^m = 0, \\ rx_{m-2}\xi + rx_{m-1}\xi^2 + \ldots + x_{m-4}\xi^{m-1} + x_{m-3}\xi^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ rx_1\xi + rx_2\xi^2 + \ldots + rx_{m-1}\xi^{m-1} + x_0\xi^m = 0, \end{cases}$$

et le résultat de l'élimination se trouve représenté par le déterminant

$$(34) \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ rx_{m-1} & x_0 & \ldots & x_{m-3} & x_{m-2} \\ rx_{m-2} & rx_{m-1} & \ldots & x_{m-4} & x_{m-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ rx_1 & rx_2 & \ldots & rx_{m-1} & x_0 \end{vmatrix},$$

dont le mode de formation est suffisamment indiqué. On remarquera que r est facteur du premier terme de la seconde ligne, qu'il est facteur des deux premiers termes de la troisième ligne, et ainsi de suite, de telle sorte qu'il est facteur des $m-1$ premiers termes de la dernière ligne.

Quant au facteur K, il est égal à 1, car le produit demandé et le déterminant contiennent tous deux le terme x_0^m.

Nous allons maintenant démontrer le théorème général suivant, qui comprend, comme cas particuliers, les théorèmes II et III.

Théorème IV. — *Si l'on multiplie entre elles une fonction du degré m représentée par le déterminant général et une fonction de même espèce, on obtient une autre fonction de même espèce que les deux autres.*

En se reportant aux démonstrations particulières données aux nos 5 et 6, on voit que tout revient à démontrer qu'en multipliant l'un par l'autre les deux facteurs

$$x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_{m-1}\alpha^{m-1}, \quad x'_0 + x'_1\alpha + \ldots + x'_{m-1}\alpha^{m-1},$$

on obtient un produit de même forme. Or, en effectuant la multiplication, on a

$$\begin{array}{ll|l|l|l}
x_0x'_0 & +x_1x'_0 & \alpha + x_2x'_0 & \alpha^2 + \ldots + x_{m-1}x'_0 & \alpha^{m-1} \\
+rx_{m-1}x'_1 & +x_0x'_1 & \quad +x_1x'_1 & \qquad +x_{m-2}x'_1 & \\
+rx_{m-2}x'_2 & +rx_{m-1}x'_2 & \quad +x_0x'_2 & \qquad +\ldots\ldots & \\
+\ldots\ldots & +\ldots\ldots & \quad +rx_{m-1}x'_3 & \qquad +x_0x'_{m-1} & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \quad +rx_3x'_{m-1} & & \\
+rx_1x'_{m-1} & +rx_2x'_{m-1} & \quad +\ldots\ldots & &
\end{array}$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned}
X_0 &= x_0x'_0 + r(x_{m-1}x'_1 + x_{m-2}x'_2 + \ldots + x_1x'_{m-1}), \\
X_1 &= x_1x'_0 + x_0x'_1 + r(x_{m-1}x'_2 + \ldots + x_2x'_{m-1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{m-1} &= x_{m-1}x'_0 + x_{m-2}x'_1 + \ldots + x_0x'_{m-1},
\end{aligned}$$

on obtient la fonction $X_0 + X_1\alpha + X_2\alpha^2 + \ldots + X_{m-1}\alpha^{m-1}$, de même espèce que les deux premières.

On voit, d'ailleurs, immédiatement de quelle manière se forme la fonction X_0, et comment les autres fonctions s'en déduisent par la permutation circulaire des indices $0, 1, 2 \ldots m-1$ dans les premiers facteurs de chaque

terme. On remarque encore que r est multiplicateur de tous les termes, excepté un dans la première formule, excepté deux dans la seconde, et ainsi de suite, de telle sorte que, dans la dernière formule, r n'est multiplicateur d'aucun terme.

On pourra maintenant, si l'on veut, obtenir les valeurs de X_0, X_1, X_2, ..., X_{m-1} correspondant aux cas où l'on multiplie entre eux un nombre quelconque de facteurs égaux. (*A suivre.*)

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. PTASZYCKI,
à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Le système de trois points matériels, dont les masses sont égales à l'unité, se meut dans le plan des coordonnées rectangulaires, de sorte que, pendant tout le temps du mouvement du système, son centre de gravité reste à l'origine des coordonnées; ses moments d'inertie par rapport aux axes $x'x$ et $y'y$ sont des quantités constantes égales à a et b et ses axes principaux d'inertie coïncident avec les axes des coordonnées. Alors :

I. *Les points du système se meuvent sur une ellipse, dont l'équation est*

$$\frac{x^2}{\frac{2a}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2b}{3}} = 1.$$

II. *L'aire du triangle, dont les sommets sont les trois points du système, dans toutes ses positions, est une quantité constante égale à* $\frac{\sqrt{3ab}}{2}$.

1. Pendant tout le temps du mouvement, les coordonnées des trois points du système doivent satisfaire aux cinq équations suivantes :

$$(1) \qquad x + x_1 + x_2 = 0,$$
$$(2) \qquad y + y_1 + y_2 = 0,$$
$$(3) \qquad x^2 + x_1^2 + x_2^2 = a,$$
$$(4) \qquad y^2 + y_1^2 + y_2^2 = b,$$
$$(5) \qquad xy + x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$$

Cela posé, de l'identité

$$(x^2 + x_1^2 + x_2^2)(y^2 + y_1^2 + y_2^2) - (xy + x_1y_1 + x_2y_2)^2$$
$$= (xy_1 - x_1y)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2y - xy_2)^2,$$

en remarquant que, en vertu des équations (1) et (2),

$$xy_1 - x_1y = x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y - xy_2,$$

et ayant égard aux équations (3), (4) et (5), on tire

$$ab = 3(x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Mais

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2,$$

ou, d'après les équations (3), (4) et (5),

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (a - x^2)(b - y^2) - x^2y^2;$$

donc

$$ab = (a - x^2)(b - y^2) - x^2y^2,$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{\frac{2a}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2b}{3}} = 1.$$

2. L'aire P du triangle, dont les sommets sont (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), est égale à

$$P = \pm \frac{1}{2}[xy_1 + x_1y_2 + x_2y - (xy_2 + x_1y + x_2y_1)];$$

mais, à l'aide des équations

$$(x+x_1+x_2)(y+y_1+y_2)=0, \quad xy+x_1y_1+x_2y_2=0,$$

on conclut que

$$xy_1+x_1y_2+x_2y=-(xy_2+x_1y+x_2y_1);$$

donc

$$(6)\qquad P^2=(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2=(xy_2+x_1y+x_2y_1)^2.$$

Or, de l'identité

$$(x^2+x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y^2)-(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2$$
$$=(xy_2-x_1y_1)^2+(x_1y-x_2y_2)^2+(x_2y_1-xy)^2,$$

comme, à cause des équations (1) et (2),

$$xy_2-x_1y_1=x_1y-x_2y_2=x_2y_1-xy,$$

on obtient l'égalité

$$(x^2+x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y^2)-(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2$$
$$=(xy_2-x_1y_1)(x_1y-x_2y_2)+(xy_2-x_1y_1)(x_2y_1-xy)$$
$$+(x_1y-x_2y_2)(x_2y_1-xy);$$

en l'ajoutant, après l'avoir multipliée par 2, à l'identité précédente, on obtient l'expression

$$3(x^2+x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y^2)-3(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2$$
$$=[xy_2+x_1y+x_2y_1-(xy+x_1y_1+x_2y_2)]^2,$$

qui donne immédiatement, en ayant égard aux équations (3), (4), (5) et (6),

$$3ab-3P^2=P^2;$$

et par conséquent

$$P=\frac{\sqrt{3ab}}{2}.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1878.

Composition de Mathématiques.

On donne une conique et deux points fixes A et B sur cette courbe. Une circonférence quelconque passant par les deux points A et B rencontre la conique en deux autres points variables C et D ; on mène les droites AC, BD qui se coupent en M, les droites AD, BC qui se coupent en N. Déterminer :

1° Le lieu des points M et N ;

2° Le lieu des points de rencontre de la droite MN avec la circonférence à laquelle elle correspond.

On construira les deux lieux.

Composition de Physique.

I. Une lentille de $0^{m},4$ de foyer est à 2 mètres d'un tableau blanc sur lequel elle projette l'image d'un objet. Entre cet objet et la lentille, qui est fixe, on en place une seconde dont la distance focale est de $0^{m},1$, et on la déplace, ainsi que l'objet, jusqu'à ce que l'image projetée par les deux lentilles soit au point sur le tableau. La lentille mobile est alors à une distance x de la lentille fixe, et à une distance y de l'objet.

1° On trouvera l'équation qui lie x et y et on la discutera ;

2° On trouvera la formule du grossissement et on la discutera ;

3° On trouvera la marche des rayons lumineux pour le cas où $x = 0^{m},2$.

II. Après avoir divisé un tube en parties d'égale capacité, on y introduit une longue colonne de mercure, puis on la fait sortir et on la pèse; elle occupait 250 divisions et pèse $2^{gr},5$. On souffle ensuite un réservoir à ce tube et l'on en fait un thermomètre à mercure; le poids du mercure introduit est de $129^{gr},6$. On détermine les points fixes de ce thermomètre et l'on trouve qu'il marque 10 divisions à 0 et 210 à 100 degrés.

On demande, d'après cela, quel est le coefficient $\frac{1}{n}$ de la dilatation cubique du verre; on exprimera n avec trois chiffres significatifs seulement.

Ce coefficient étant déterminé, on enlèvera le mercure et l'on mettra de l'eau à la place. Ce thermomètre à eau marquera : 20 divisions à $0°$; $26^{div},3$ à $+15°$; $73^{div},5$ à $-15°$. On demande quel est le volume de l'eau à $+15°$ et à $-15°$, celui de l'eau à $0°$ étant pris pour unité.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1878;

PAR M. ÉDOUARD GUILLET.

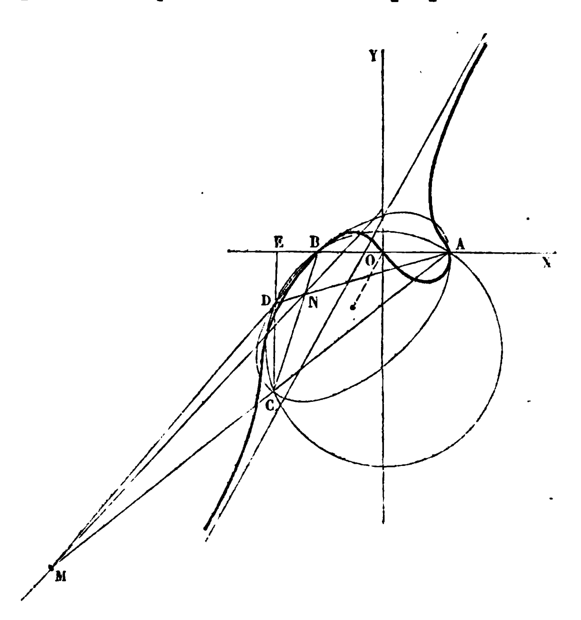
On donne une conique et deux points fixes A *et* B *sur cette courbe. Une circonférence quelconque passant par les deux points* A *et* B *rencontre la conique en deux autres points variables* C *et* D; *on mène les droites* AC, BD *qui se coupent en* M, *les droites* AD, BC *qui se coupent en* N. *Déterminer :*

1° *Le lieu des points* M *et* N;

2° *Le lieu des points de rencontre de la droite* MN *avec la circonférence à laquelle elle correspond.*

On construira les deux lieux.

Je prends AB pour axe des x, la perpendiculaire en



son milieu pour axe des y. Les équations de la conique fixe et du cercle variable passant par A et B sont

$$(1) \qquad x^2 + 2Pxy + Qy^2 + 2Ry - a^2 = 0,$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2R'y - a^2 = 0,$$

P, Q, R étant des constantes, R′ un paramètre variable et $2a$ la distance AB.

1° On obtiendra le lieu des points M et N en exprimant que la courbe qui passe par les quatre points d'intersection de la conique et du cercle est un système de deux droites, c'est-à-dire que le centre est sur la courbe.

Or l'équation d'une pareille courbe est

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (1+\lambda)x^2 + 2Pxy + (Q+\lambda)y^2 \\ \quad + 2(R+R'\lambda)y - (1+\lambda)a^2 = 0 \end{array} \right.$$

et il suffira d'éliminer R' et λ entre les deux équations du centre et la dérivée de (3) par rapport à une variable auxiliaire rendant homogène l'équation (3) :

$$(4)\quad \begin{cases} (1+\lambda)x + Py = 0, \\ Px + (Q+\lambda)y + (R+\lambda R') = 0, \\ (R+\lambda R')y - (1+\lambda)a^2 = 0, \end{cases}$$

ce qui conduit à l'équation de l'hyperbole équilatère

$$(5)\qquad P(x^2 - y^2) + (Q-1)xy - Pa^2 = 0.$$

Cette hyperbole a pour centre l'origine, milieu de AB, passe par les deux points A et B, et est indépendante de R.

2° Pour obtenir le lieu des points de rencontre de MN avec la circonférence correspondante, il suffit de remarquer que MN est la polaire par rapport à ce cercle du point E de rencontre des droites AB et CD.

Or l'équation de CD s'obtient en retranchant membre à membre les équations (1) et (2)

$$2Px + (Q-1)y + 2(R - R') = 0,$$

et le point E sur l'axe des x a pour abscisse

$$\frac{R' - R}{P}.$$

L'équation de MN est donc

$$(6)\qquad (R' - R)x + PR'y - Pa^2 = 0.$$

Éliminant R' entre cette équation et celle du cercle, on a le lieu

$$(7)\quad (x^2 + y^2)(x + Py) + 2Rxy - a^2(x - Py) = 0.$$

On voit que c'est une courbe du troisième degré passant par l'origine, par les points A et B et par les points circulaires de l'infini; elle est, de plus, indépendante du coefficient Q. Il n'y a qu'une asymptote réelle, parallèle à la droite

$$x + Py = 0,$$

c'est-à-dire parallèle au diamètre conjugué de AB dans la conique; l'ordonnée à l'origine d de cette asymptote est

$$d = \frac{2R}{1 + P^2}.$$

De plus la courbe coupe son asymptote et a trois points d'inflexion; la tangente à l'origine O est

$$x - Py = 0,$$

telle que AB est bissectrice entre elle et le diamètre conjugué de AB.

Enfin, si l'on transporte l'origine au point A, les termes constants disparaissent et ceux du premier degré se réduisent à

$$ax + (Pa + R)y$$

à la fois dans les équations de la conique et du lieu, ce qui indique que la courbe (7) est tangente à la conique au point A. Le même fait se produit en B.

Note. — Solutions analogues par MM. J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger, et H. Mercereau, élève du lycée du Havre. M. Moret-Blanc a joint une solution géométrique à la solution analytique.

REMARQUES AU SUJET D'UNE NOTE DE M. COLLIGNON;

PAR M. A. TISSOT.

Dans le numéro d'avril des *Nouvelles Annales*, M. Collignon a exposé une méthode ingénieuse pour la construction de deux abaques donnant à vue les heures du lever et du coucher du Soleil, ainsi que les azimuts de l'astre à ces deux instants en un lieu terrestre quelconque et à une époque quelconque de l'année. Les procédés graphiques ainsi appliqués aux questions d'Astronomie sont très-utiles lorsque l'on veut obtenir rapidement, et avec une première approximation, des nombres qui n'ont pas encore été publiés dans les éphémérides, ou bien lorsqu'il s'agit de déterminer ces nombres pour des lieux autres que ceux auxquels les éphémérides se rapportent. Ils constituent de plus, pour la Cosmographie, un moyen d'enseignement fort efficace, ainsi que je l'ai souvent constaté. Les élèves prennent intérêt à ce genre de travail qui consiste à étudier, à l'aide d'épures faites par eux, les circonstances d'un phénomène; les explications leur sont rendues claires et se gravent dans leur mémoire. Afin que les tracés imaginés par M. Collignon acquièrent aussi ce genre d'utilité, il importe de rendre la construction qui leur sert de base indépendante des formules de la Trigonométrie sphérique; or il est facile de justifier cette construction sans aucun calcul et d'en déduire, au contraire, les formules en question, ainsi que l'on pourra s'en convaincre en lisant, pages 156 et 158 de la troisième édition de mon *Précis de Cosmographie*, les deux paragraphes intitulés : *Détermination des heures du lever et du coucher du Soleil*, et *Déter-*

mination des heures du commencement et de la fin du crépuscule. Le premier de ces deux paragraphes donne aussi le moyen de déterminer les amplitudes ortive et occase.

QUESTION.

1310. Déduire d'une même identité une infinité de solutions en nombres entiers de chacun des deux systèmes

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+t^3, \\ xyz=uvt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+t^3, \\ x+y+z=u+v+t. \end{cases}$$

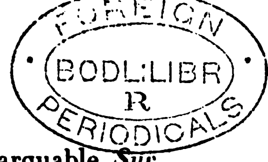
(Desboves.)

ERRATA.

Pages.	*Lignes.*	*Au lieu de*	*Lisez*
221	6	$\pm\mu^{2-1}$	$\pm\mu^{2n-1}$
	8	h'	h'_n
	8	h_n	h'_n
	12	$h+\mu$	$h\times\mu$
222	1	$h+\mu$	$h\times\mu$
226	16	$=2p-1$	doit être supprimé
	22	$\pi^{\lambda_{p-1}+\lambda_{p-2}+\lambda_{p-3}+\ldots+\lambda_2+\lambda_1+1}$	$\pi^{\lambda_p+\lambda_{p-1}+\lambda_{p-2}+\ldots+\lambda_2+\lambda_1+1}$
227	12	$(h_\mu^{2^n-1})$	$(h\times\mu)^{2^n-1}$
228	30	pareil	précis
230	2	2306	2302

NOTE SUR LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION BEZOUT-CAUCHY ;

Par M. V. HIOUX,
Professeur au Lycée de Rennes.



Dans l'article si intéressant et si remarquable *Sur l'élimination*, de M. Rouché, publié dans les *Nouvelles Annales* de 1877, on rencontre l'identité fondamentale

$$V_p(x) = f(x)\,G_0(x) - g(x)\,F_0(x).$$

On sait que le programme du cours de Mathématiques spéciales recommande particulièrement l'emploi de la méthode d'élimination de Bezout, perfectionnée par Cauchy.

Je me propose d'établir par cette méthode, non-seulement l'identité précédente, mais encore les propriétés du résultant R que l'on démontre généralement au moyen des fonctions symétriques (*).

I. Considérons deux équations algébriques $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ de degrés m et n respectivement, n étant égal ou inférieur à m.

Si l'on pose

$$f_k(x) = a_{k+1} + a_{k+2}\,x + \ldots a_{k+i+1}\,x^i + \ldots + a_m\,x^{m-k-1},$$
$$g_k(x) = b_{k+1} + b_{k+1}\,x + \ldots b_{k+i+1}\,x^i + \ldots + b_m\,x^{m-k-1},$$

(*) Voilà déjà plusieurs années que, dans les conférences que je fais à Sainte-Barbe, j'expose la théorie de l'élimination et ses conséquences, sans faire intervenir les fonctions symétriques, et en tenant compte des racines infinies.

Dans plusieurs conférences faites au lycée de Toulouse, au mois de juillet dernier, j'ai encore reproduit cette exposition. Ch. B.

en supposant nuls les coefficients b_{m+1}, b_{n+1}, ..., b_m, si l'on a $n < m$, on peut écrire

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) + x^{k+1} f_k(x),$$
$$g(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k) + x^{k+1} g_k(x),$$

d'où l'on déduit l'identité

$$(k) \quad f(x) g_k(x) - g(x) f_k(x) = C_{k,0} + C_{k,1} x \ldots \\ + C_{k,i} x^i + \ldots C_{k,m-1} x^{m-1}.$$

Cette identité, dans laquelle le coefficient de x^i est $C_{k,i}$, a lieu pour toutes les valeurs entières de k depuis o jusqu'à $m - 1$, bien que les deux membres se réduisent à $-g(x) f_k(x)$ quand on donne à k les valeurs n, $n + 1$, ..., $m - 1$.

En égalant à zéro le second membre, polynôme entier en x du degré $m - 1$, on a l'équation

$$(1) \quad C_{k,0} + C_{k,1} x + \ldots + C_{k,i} x^i + \ldots + C_{k,m-1} x^{m-1} = 0,$$

qui équivaut à m équations du premier degré en x, $x^2, \ldots, x^{m-1}$, lesquelles sont satisfaites pour toute valeur de x commune à $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Le déterminant R de ces m équations est le résultant donné par Cauchy dans son *Mémoire sur l'élimination*.

Désignons par R_p le mineur principal d'ordre p, obtenu en supprimant dans R les p premières lignes et les p premières colonnes; le premier élément de R_p est $C_{p,p}$.

Cela posé, donnons à k dans l'équation (1) les valeurs p, $p + 1, \ldots, m - 1$ et remplaçons dans R_p les éléments de la première colonne par les premiers membres des équations ainsi obtenues, arrêtés au terme en x^p, nous aurons sous forme de déterminant une fonction $V_p(x)$ de degré p et dans laquelle le coefficient de x^p est R_p.

La valeur du déterminant $V_p(x)$ ne sera pas changée

si l'on ajoute aux éléments de la première colonne les éléments correspondants des colonnes suivantes multipliés respectivement par $x^{p+1}, \ldots, x^{m-1}$.

Dans le déterminant ainsi transformé, le premier élément de la première colonne est $f(x)g_p(x) - g(x)f_p(x)$; les suivants ont la même forme et le dernier est

$$f(x)g_{m-1}(x) - g(x)f_{m-1}(x).$$

Ce déterminant se décompose donc en deux autres et l'on a

$$(2) \qquad V_p(x) = f(x)G_p(x) - g(x)F_p(x).$$

Les polynômes $G_p(x)$, $F_p(x)$ se déduisent de R_p, en y remplaçant les éléments de la première colonne d'abord par $g_p(x), g_{p+1}(x), \ldots, g_{m-1}(x)$, puis par $f_p(x)$, $f_{p+1}(x), f_{p+2}(x), \ldots, f_{m-1}(x)$.

Le premier est du degré de $g_p(x)$, savoir $n - p - 1$; le second est du degré de $f_p(x)$, savoir $m - p - 1$.

Si l'on suppose $p = 0$, on a la deuxième identité

$$(3) \qquad R = f(x)G_0(x) - g(x)F_0(x).$$

II. Théorème. — *Le résultant* R *est un déterminant symétrique.*

En effet, on a d'une manière générale

$$(4) \quad \begin{aligned} C_{k,i} = (a_0, b_{k+i+1}) + (a_1, b_{k+i}) + \ldots + (a_{k-1}, b_{i+2}) \\ + (a_k, b_{i+1}) + (a_{k+1}, b_i) + \ldots + (a_i, b_{k+1}). \end{aligned}$$

Mais, si l'on suppose $i > k$, les déterminants du second ordre qui suivent (a_k, b_{i+1}) forment une suite dans laquelle les déterminants également distants des extrêmes sont égaux et de signes contraires, le déterminant du milieu de la suite étant composé de deux colonnes identiques si leur nombre est impair; l'ensemble de ces déterminants est donc nul et l'on a $C_{k,i} = C_{i,k}$. c. q. f. d.

Corollaire. — Si l'on suppose $i > k$, un élément situé à droite de la diagonale principale de R a pour expression

$$(5) \qquad C_{k,i} = (a_k, b_{i+1}) + C_{k-1,i+1}.$$

Les éléments d'une ligne placés à droite de la diagonale principale étant calculés par cette formule, on complètera le déterminant par symétrie.

Théorème de Bezout. — Si les équations proposées sont à deux variables x et y, on peut supposer que a_i, b_i sont des polynômes entiers en y, le premier du degré $m - i$, le second du degré $n - i$. Un élément $C_{k,i}$ de R a donc un degré égal à celui du produit $a_k b_{i+1}$, c'est-à-dire

$$m - k + n - i - 1$$

ou bien

$$(m + n - 1) - (k + i).$$

Or, un terme du développement de R est un produit de m éléments pris chacun à l'intersection d'une ligne et d'une colonne distinctes. Le degré de ce terme s'obtiendra donc en donnant à k, puis à i les valeurs 0, 1, 2, ..., $m-1$, et en répétant m fois la quantité $(m+n-1)$. Mais on a

$$2(0 + 1 + 2 \ldots + m - 1) = m(m-1).$$

Le degré cherché est donc

$$m(m + n - 1) - m(m - 1) = mn.$$

Donc : *Si entre deux équations entières $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$, la première du degré m, la seconde du degré n, on élimine l'inconnue x, l'équation finale en y est au plus du degré mn.*

Corollaire. — *Les deux équations proposées admettent en général mn solutions.*

En effet, soit $y = \beta$ une des mn racines de $R = 0$. Pour cette valeur de y, les équations $f(\beta, x) = 0$, $g(\beta, x) = 0$ ont une racine commune $x = \alpha$ qui vérifie les équations (1). Si l'on supprime la première de ces équations, on tire des autres *l'équation adjointe*

$$x = \frac{R'}{R_1},$$

dans laquelle on obtient R' à l'aide du premier mineur principal R_1, en remplaçant dans ce dernier les coefficients de l'inconnue x par les termes connus changés de signes. La valeur de x est ainsi le quotient de deux fonctions rationnelles de y. Comme on n'a pas en général $R_1 = 0$ pour $y = \beta$, on voit qu'à chacune des racines de $R = 0$ correspond une seule valeur de x; on ne trouve donc que mn couples de valeurs de x et y vérifiant les deux équations proposées.

Propriétés particulières de R.

I. *Le déterminant symétrique* R *est une fonction entière et homogène du degré* $2m$ *des coefficients* a *et* b, *dans laquelle la somme des indices de ces lettres dans un terme quelconque est constante et égale à* mn.

En effet, un élément quelconque $C_{k,i}$ de R est composé de déterminants du second ordre dont chacun est entier et du second degré en a et b. Le produit des m éléments qui forment un terme T de R est donc un polynôme entier en a et b du degré $2m$.

En outre, dans T, on a démontré que la somme des compléments à m des indices de a et des compléments à n des indices de b est égale à mn; il en est, par suite, de même de la somme des mêmes indices. Donc, etc.

II. *Le déterminant symétrique* R *est le produit par*

un facteur numérique d'une fonction entière des coefficients a et b qui renferme les premiers au degré n et les seconds au degré m.

En effet, à partir de $k = n$ jusqu'à $k = m - 1$, substituons aux équations (1) celles qui proviennent de leurs derniers termes égalés à zéro, savoir :

$$-a_m x^{m-n-1} g(x) = 0, \quad -a_m x^{m-n-2} g(x) = 0, \quad \ldots, \quad -a_m x g(x) = 0, \quad -a_m g(x) = 0.$$

Le déterminant R sera ainsi remplacé par un autre dont on peut déduire R en ajoutant aux éléments d'une des $(m - n)$ dernières lignes les éléments des lignes suivantes multipliées par des facteurs constants. Ces deux déterminants sont donc égaux en valeur et l'on a

$$R = (-a_m)^{m-n} \Delta,$$

puisque, dans le deuxième déterminant, tous les éléments des $(m - n)$ dernières lignes sont multipliés par $-a_m$.

Le déterminant Δ provient du système (1), dans lequel les $(m - n)$ dernières équations se trouvent remplacées par

$$x^{m-n-1} g(x) = 0, \quad x^{m-n-2} g(x) = 0, \quad \ldots, \quad x g(x) = 0, \quad g(x) = 0.$$

Ce déterminant Δ renferme les a au premier degré dans n lignes seulement, et les b au premier degré dans m lignes, ce qui démontre la proposition II.

Remarque. — Puisque a_m est de degré 0 en y, l'équation finale $\Delta = 0$ est la même que $R = 0$. Dans la pratique, on remplace R par Δ. Le degré d'un terme T de Δ est $2m - (m - n) = m + n$, si l'on revient au cas de deux équations à une inconnue.

III. *Le résultant* R *est le produit par un facteur numérique des mn différences entre chacune des racines de*

l'une des équations et chacune des racines de l'autre.

En effet, soit $x = \alpha$ une racine de la première équation, $x = \alpha'$ une racine de la seconde; la première est une certaine fonction des coefficients a et la deuxième une certaine fonction des coefficients b; or, pour $\alpha' = \alpha$, on a $R = 0$ et réciproquement. Donc R est divisible par $\alpha - \alpha'$; mais α désigne une quelconque des racines de la première équation et α' une quelconque des racines de la seconde. Donc, R est divisible par chacune des mn différences $\alpha - \alpha'$, $\alpha - \beta'$, ..., et, par conséquent, par leur produit, ce qui démontre la proposition III.

Si l'on a

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

on trouve

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

d'où

$$R = a^2 a'^2 (\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta'),$$

les racines de la première équation étant α et β, et les racines de la seconde α' et β'.

Corollaire. — *Le résultant* R *d'une équation $f(x) = 0$ et de sa dérivée $f'(x) = 0$ est le produit d'un facteur numérique par le produit des carrés des différences des racines de $f(x) = 0$.*

Supposons, en effet, que l'on ait formé l'équation aux carrés des différences des racines de $f(x) = 0$, et soit V le dernier terme de cette équation, c'est-à-dire le produit des carrés des différences des racines de la proposée. Si l'on a $V = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine double, par suite $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ ont une racine commune : donc R et V ne peuvent différer que par un facteur numérique.

SUR LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ DONT LES RACINES S'EXPRIMENT SANS L'EMPLOI DES RADICAUX CUBIQUES;

PAR M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

1. On a ce théorème :

1° *Si les coefficients de l'équation*

$$(1) \qquad x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$$

sont des quantités rationnelles assujetties à la relation

$$(2) \qquad k(k-1)^2P^3 - 4kPR + Q^2 = 0,$$

où k est un nombre rationnel, l'expression algébrique des racines x ne contient pas de radical cubique.

Pour $k = \frac{2}{3}$, par exemple, on a la relation

$$2P^3 - 72PR + 27Q^2 = 0,$$

ce qui s'accorde avec l'énoncé de la Question 387 des *Nouvelles Annales* (*).

Pour $k = 0$, on a $Q = 0$, et l'équation (1) devient bicarrée.

Pour $k = \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$, la formule (2) fournit des conditions très-simples dont quelques-unes figurent dans des ouvrages didactiques.

2° *Réciproquement, si l'expression algébrique des racines x ne contient pas de radicaux cubiques, la re-*

(*) Proposée par M. Faure au t. XVI de la 1re série, p. 183, et résolue par M. Blerzy au t. XVIII, p. 432, et par M. Martelli au t. III de la 2e série, p. 401.

lation (2) *subsiste entre les coefficients rationnels* P, Q, R *pour une valeur rationnelle de k. On suppose ici que* P *est différent de zéro.*

C'est, ainsi que nous allons le voir, une conséquence directe de ce fait bien connu, que *lorsqu'une équation du quatrième degré à coefficients commensurables est résoluble sans l'emploi de radicaux cubiques, l'équation résolvante a une racine commensurable, et réciproquement.* Le théorème ne doit donc pas être regardé comme nouveau. Cependant, comme il a une importance propre et qu'il n'a peut-être pas encore été énoncé sous une forme simple et explicite, il nous a paru opportun de le présenter ici, en le justifiant par la démonstration qui suit.

2. Pour rattacher le théorème à la résolution de l'équation (1), nous rappellerons d'abord que la résolvante de cette équation est, par la méthode de Lagrange,

$$\alpha^3 + 2P\alpha^2 + (P^2 - 4R)\alpha - Q^2 = 0.$$

D'après l'expression connue des racines x en fonction des racines α, il est manifeste que, lorsque cette résolvante admet une racine rationnelle (ce qui fait que les deux autres racines dépendent d'une équation du second degré), les racines x s'expriment par des radicaux carrés.

Les coefficients P, Q, R sont supposés rationnels; par conséquent, si une racine α est rationnelle, en faisant $\alpha = -kP$, k sera rationnel. On peut donc remplacer l'équation en α par la transformée

$$(2) \qquad k(k-1)^2P^3 - 4kPR + Q^2 = 0$$

et affirmer que, lorsque cette relation (2) a lieu entre les coefficients P, Q, R pour une valeur rationnelle de k,

l'expression algébrique des racines x ne renferme pas de radical cubique.

Réciproquement, si x s'exprime sans l'emploi des racaux cubiques, la résolvante en α (et par suite sa transformée en k, si P est différent de zéro) aura nécessairement une racine rationnelle (voir SERRET, *Algèbre supérieure*, 4[e] édition, t. II, p. 467). Inutile de rappeler que la résolvante de Ferrari, considérée par M. Serret, se ramène à celle de Lagrange au moyen d'une simple transformation linéaire.

Le théorème est donc démontré.

Ajoutons, à l'appui de ce qui précède, que si l'on cherche à déterminer trois quantités α, β, γ de manière que l'on ait

$$-\alpha + 2\beta = P, \quad 2\alpha\gamma = Q, \quad -\alpha\gamma^2 + \beta^2 = R,$$

on est conduit aux équations

$$\alpha^3 + 2P\alpha^2 + (P^2 - 4R)\alpha - Q^2 = 0,$$
$$\beta = \frac{\alpha + P}{2}, \quad \gamma = \frac{Q}{2\alpha},$$

dont la première coïncide avec la résolvante rapportée ci-dessus. L'équation (1) devient par là

$$x^4 - (\alpha - 2\beta)x^2 + 2\alpha\gamma x - (\alpha\gamma^2 - \beta^2)$$
$$= [x^2 + x\sqrt{\alpha} + (\beta - \gamma\sqrt{\alpha})][x^2 - x\sqrt{\alpha} + (\beta + \gamma\sqrt{\alpha})] = 0,$$

c'est-à-dire que, α étant un nombre rationnel, elle se décompose en deux équations du second degré dont les coefficients, et par suite les racines, sont exprimés sans l'intervention d'aucun radical cubique. On reconnaîtra de même que, si les quatre racines x s'expriment sans radical cubique, l'une au moins des valeurs de α doit être rationnelle.

Remarque. — La seconde partie du théorème suppose

que P est différent de zéro. Si $P = 0$, on verra, par ce qui va suivre, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^4 + Qx + R = 0$$

soit résoluble par radicaux carrés, s'exprime par la relation

$$k(k-1)^2(4R)^3 - Q^4 = 0,$$

dans laquelle k doit être rationnel.

3. Si l'on suppose $R = 0$ dans l'équation (1), P et Q étant rationnels et différents de zéro, on conclura de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation cubique

$$x^3 + Px + Q = 0 \tag{4}$$

ait une racine rationnelle peut s'exprimer par la relation

$$k(k-1)^2P^3 + Q^2 = 0,$$

k étant rationnel.

C'est, en effet, ce qui se prouve directement sur l'équation (3), en y faisant $x = \frac{Q}{(k-1)P}$, sans passer par la considération de l'équation du quatrième degré. On voit de plus que les trois racines x sont rationnelles lorsqu'il y a trois valeurs rationnelles de k vérifiant la relation indiquée, et réciproquement.

Au point de vue de la détermination de x, la transformation précédente ne fait que transposer la difficulté sans donner le moyen de la résoudre. Mais il n'en est pas ainsi au point de vue théorique, où l'on se propose seulement de formuler les conditions relatives à la rationnalité des racines x.

Faisant, dans la relation ci-dessus, $k - 1 = h$, et pas-

sant les quantités connues dans le second membre, les conditions dont il s'agit se présentent sous une forme tout à fait nette et explicite. On obtient, en effet, la relation

$$(5) \qquad h^2 + h^3 = -\frac{Q^2}{P^3},$$

c'est-à-dire une formule dont l'un des membres exprime une *forme fractionnaire abstraite* (la somme algébrique du carré et du cube d'un même nombre rationnel), tandis que l'autre membre est une fonction déterminée des coefficients, fonction dont la valeur doit appartenir de *une* ou de *trois* manières à la forme indiquée, selon que l'équation (3) admet *une* ou *trois* racines rationnelles.

Il y a avantage cependant à ne considérer cette formule (4) que relativement à la rationnalité d'une racine de la proposée. Pour exprimer que les deux autres racines sont également commensurables, il est préférable d'avoir recours à la condition bien connue qui assujettit les racines à être des fonctions rationnelles l'une de l'autre et des quantités connues (voir l'*Algèbre supérieure* déjà citée). Cette condition ayant lieu, il suffira, pour la rationnalité des trois valeurs de x, que la quantité positive $-\frac{Q^2}{P^3}$ soit considérée comme devant être égale à la somme du carré et du cube d'un même nombre rationnel *positif*.

D'après cela, nous énoncerons le théorème suivant, où nous admettons, pour plus de précision et sans nuire à la généralité, que les valeurs numériques de P et Q sont entières :

1° *Pour que l'équation*

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

à coefficients entiers, admette une racine entière, il faut et il suffit que le rapport $-\frac{Q^2}{P^3}$ *soit égal à la somme algébrique du carré et du cube d'un même nombre rationnel.*

2° *Pour que l'équation considérée ait ses trois racines entières (et inégales), il faut et il suffit que le rapport mentionné soit égal à la somme du carré et du cube d'un même nombre rationnel positif, et que la quantité* $-4P^3-27Q^2$ *soit égale à un carré pris positivement.*

Nous ne nous arrêterons pas sur quelques spécifications ultérieures qui pourraient être ajoutées à l'énoncé, et qui n'échapperont pas au lecteur.

Les coefficients P et Q étant donnés en nombres, on vérifiera directement si la condition mentionnée en dernier lieu est remplie; quant aux conditions fournies par la formule (4), prise dans sa généralité, elles sont purement théoriques.

Nous avons donné sur ce sujet quelques indications pratiques dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 289 et 424, ainsi que dans les énoncés de plusieurs *Questions* proposées dans les derniers volumes de ce Recueil.

NOTE SUR LA QUESTION 794;

(voir 2e série, t. VI, p. 94);

PAR M. S. REALIS.

L'équation indéterminée

$$u^2x + x^2y + y^2z + z^2u = 0,$$

qui est vérifiée identiquement, d'après la question 794,

par les formules du troisième degré

$$(1)\quad \begin{cases} u = \alpha^2\gamma - \beta^3, \\ x = \alpha(\alpha\beta - \gamma^2), \\ y = \alpha^3 - \beta^2\gamma, \\ z = -\beta(\alpha\beta - \gamma^2), \end{cases}$$

est aussi vérifiée par les formules du deuxième degré

$$(2)\quad \begin{cases} u = \alpha^2 - \alpha\beta + 3\beta^2, \\ x = 3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2), \\ y = -\alpha^2 + 3\alpha\beta - 5\beta^2, \\ z = 3(-\alpha^2 + 3\alpha\beta - 3\beta^2), \end{cases}$$

et par les formules du quatrième degré

$$(3)\quad \begin{cases} u = -(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 - \beta^4), \\ x = -(\alpha - \beta)(\alpha^3 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3), \\ y = (\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \\ z = \beta(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2), \end{cases}$$

dont l'exactitude se constate facilement par le calcul direct.

Le système (1) a cela de particulier, qu'il permet toujours d'assigner des solutions entières dans lesquelles la valeur de l'une des indéterminées est fixée d'avance arbitrairement.

Le système (2), de son côté, en y attribuant à α et β des valeurs entières quelconques, fournit des solutions où les quatre indéterminées, délivrées des facteurs communs, ne peuvent être que des nombres impairs. On voit de plus, en mettant la valeur de z sous la forme

$$z = -3[(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta)\beta + \beta^2],$$

que, dans ce système, les valeurs numériques des indé-

terminées x, z se réduisent toujours à la forme

$$3(3X^2 + Y^2).$$

Dans le troisième système, enfin, les expressions des deux indéterminées consécutives y, z renferment un facteur appartenant à la forme $3X^2 + Y^2$, ce qui, en certains cas, peut rendre préférable l'emploi des formules (3).

Outre ces systèmes de solution, il en existe d'autres où les formules montent à des degrés supérieurs au quatrième. Nous nous bornons ici à cette simple indication.

Ajoutons que, si une solution de l'équation considérée est donnée par l'égalité

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\delta + \delta^2\alpha = 0,$$

une autre solution s'obtiendra en posant

$$(4)\quad \begin{cases} u = (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 + 2\delta^2 + 2\beta\gamma - \delta(3\alpha - 3\beta - \gamma), \\ x = \beta^2 - (\gamma - \delta)^2 + \alpha(\beta - \gamma + \delta) + 2\beta\gamma, \\ y = -\alpha^2 + 2\beta^2 + (\gamma - \delta)^2 + 2\alpha\delta + \beta(\alpha - 3\gamma + 3\delta), \\ z = -(\alpha - \beta)^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta - \gamma(\alpha - \beta - \delta). \end{cases}$$

La vérification de ces formules n'a de difficulté qu'un peu de complication dans les calculs pour mettre en évidence le facteur qui annule le résultat de la substitution de ces expressions dans le premier membre de la proposée. On observera, à l'égard de ces formules (4), que les expressions de y et z se déduisent de celles de u et x, et réciproquement, en remplaçant les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les lettres $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ respectivement.

Applications. — 1° Soit fait, dans les formules (1),

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1;$$

il vient

$$u = 3, \quad x = 2, \quad y = 7, \quad z = -1,$$

et l'on a effectivement

$$3^2.2 + 2^2.7 - 7^2.1 + 1^2.3 = 0.$$

2° Pour $\alpha = 2$, $\beta = -1$, les formules (2) et (3) amènent respectivement les égalités

$$3^2.7 - 7^2.5 - 5^2.13 + 13^2.3 = 0,$$
$$-5^2.11 + 11^2.8 - 8^2.7 - 7^2.5 = 0.$$

3° Au moyen des formules (4), les trois solutions particulières qui viennent d'être trouvées engendrent respectivement les trois solutions nouvelles

$$-22^2.50 + 50^2.15 - 15^2.20 - 20^2.22 = 0,$$
$$-21^2.11 - 11^2.9 + 9^2.15 + 15^2.21 = 0,$$
$$-12^2.50 + 50^2.354 - 354^2.7 - 7^2.12 = 0.$$

PROBLÈME SUR L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Trouver le lieu des sommets des tétraèdres dont les hauteurs se rencontrent et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde, aux points où ces faces sont rencontrées par les hauteurs.

Dans un remarquable Mémoire sur les normales aux coniques, M. Desboves a démontré que, si d'un point on abaisse six normales sur l'ellipsoïde, et si l'on désigne par (x, y, z) les coordonnées du pôle du plan passant par trois des pieds des normales, celles du pôle du plan passant par les trois autres sont respectivement $-\frac{a^2}{x}$, $-\frac{b^2}{y}$, $-\frac{c^2}{z}$.

Cela posé, désignons par (x_0, y_0, z_0) le pied de la normale situé sur le sommet du tétraèdre ayant pour coordonnées (x, y, z); on a

$$(1) \qquad \frac{a^2(x-x_0)}{x_0} = \frac{b^2(y-y_0)}{y_0} = \frac{c^2(z-z_0)}{z_0} = \lambda;$$

le point ayant pour coordonnées $-\frac{a^2}{x}, -\frac{b^2}{y}, -\frac{c^2}{z}$ se trouve nécessairement situé dans le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0); on a donc

$$(2) \qquad \frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} + \frac{z_0}{z} + 1 = 0.$$

Des équations (1) on tire linéairement x_0, y_0, z_0 et, en les portant dans l'équation (2) et celles de l'ellipsoïde, on obtient

$$(3) \qquad \frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} + 1 = 0,$$

et

$$(4) \qquad \frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda)^2} = 1.$$

Donc le lieu des sommets des tétraèdres se compose de trois ellipsoïdes réels et concentriques à l'ellipsoïde proposé (*).

(*) Cette question a été traitée d'une façon bien différente, et pour le plan seulement, par MM. Bourguet et Poujade (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, p. 576, et t. XVI, p. 186).

La méthode précédente donne un grand nombre de conséquences analogues à celle que donne la solution du problème ci-dessus.

NOTE SUR LES NOMBRES PARFAITS;

PAR M. LIONNET.

I. La théorie des nombres parfaits, dont Euclide paraît s'être occupé le premier et dont il donne la définition suivante :

Un nombre entier est parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses sous-multiples, ou, en d'autres termes, *de ses parties aliquotes entières,* ou, pour abréger, *de ses aliquotes,*

laisse encore beaucoup à désirer. La formule

$$(1)\qquad x = (2^n - 1)2^{n-1},$$

où n est un entier > 1 et $2^n - 1$ un nombre premier, donne pour x toutes les valeurs possibles des nombres parfaits pairs. On a, par exemple, pour

$$n = 2,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 13,$$
$$x = 6,\quad 28,\quad 496,\quad 8128,\quad 33\,550\,336;$$

mais on ignore s'il en existe une infinité.

Quant aux nombres parfaits impairs, on peut démontrer que, *s'il en existe,* ils sont donnés par la formule

$$(2)\qquad x = (4n + 1)^{4k+1} \times i^2,$$

où $4n + 1$ est un nombre premier impair > 1, k un entier $=$ ou > 0 et i un impair > 1 et premier à $4n + 1$.

II. Nous donnerons le nom de *nombres parfaits de*

première espèce à ceux dont nous venons de parler (I), et celui de *nombre parfait de seconde espèce* à tout nombre *égal au produit de ses aliquotes*. Tels sont, par exemple,

$$8 = 1.2.4, \quad 10 = 1.2.5, \quad 14 = 1.2.7, \quad \ldots.$$

Pour obtenir tout nombre x ayant cette propriété, observons d'abord qu'il faut que l'on ait

$$(3) \qquad x = p^n$$

ou

$$(4) \qquad x = pp'P,$$

n étant un entier > 1, p et p' des nombres premiers inégaux et > 1, et P un entier $=$ ou > 1.

1° Pour qu'on ait

$$p^n = 1.p.p^2.p^3\ldots p^{n-1},$$

il faut et il suffit que

$$n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

ou que $n = 3$; donc

$$(5) \qquad x = p^3 = 1.p.p^2.$$

2° Si l'on avait $P > 1$, les nombres pP, $p'P$ seraient des aliquotes inégales de x, et dont le produit $pp'P^2$ excéderait x ; donc $P = 1$, et l'on a

$$(6) \qquad x = pp' = 1.p.p'.$$

Donc, en définitive (1° et 2°), *tous les nombres parfaits de seconde espèce sont les cubes* 8, 27, 125, ... *et les produits deux à deux* 6, 10, 15, ... *de tous les nombres premiers* 2, 3, 5, 7, 11, ... *supérieurs à l'unité.*

III. On est conduit à se demander s'il existe un ou

plusieurs nombres *doublement parfaits*, c'est-à-dire *égaux à la somme et au produit de leurs aliquotes.* Pour le savoir, il suffit évidemment de chercher si, parmi les nombres parfaits de seconde espèce, qui sont tous donnés par les formules (5) et (6), il en est d'égaux à la somme de leurs aliquotes. Or on reconnaît immédiatement l'impossibilité de la relation

$$p^3 = 1 + p + p^2.$$

Quant à l'égalité

$$pp' = 1 + p + p',$$

elle exige que le plus grand des deux nombres premiers p, p', inégaux et supérieurs à l'unité, divise l'autre augmenté d'une unité, ce qui exige que p et p' soient consécutifs et, par suite, égaux aux nombres 2 et 3 ; donc on a

$$pp' = 6 = 1 + 2 + 3 = 1.2.3\,;$$

d'où il suit que 6 est le seul nombre positif doublement parfait.

Remarque. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que des nombres parfaits positifs ; mais il est bon d'observer qu'en changeant le signe d'un nombre parfait de première ou de seconde espèce, leurs aliquotes changent de signe en conservant, comme leur somme ou leur produit, la même valeur absolue, et que zéro est évidemment un nombre doublement parfait ; d'où il suit que o, + 6 et — 6 sont les seuls nombres doublement parfaits.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1878)

TROISIÈME QUESTION

(voir p. 90);

SOLUTION DE M. ROBAGLIA.

On donne un triangle équilatéral ABC. *Mener par le point* O, *milieu de* BC, *une sécante qui rencontre en* M *le côté* AB, *et en* N *le prolongement du côté* AC, *de manière que la somme des aires des triangles* OMB *et* ONC *soit égale à l'aire du triangle* ABC.

En résumé, l'aire du triangle MAN doit être double de l'aire du triangle ONC, et, comme les aires de ces deux triangles sont entre elles dans le rapport des produits AN.AM et OC.CN, on écrira, pour exprimer cette condition,

$$AN \,.\, AM = BC \,.\, CN.$$

Mais, à cause de la transversale MON,

$$AN \,.\, BM = AM \,.\, CN;$$

il s'ensuit $\frac{BM}{AM} = \frac{AM}{BC} = \frac{AM}{AB}$; donc AM est le plus grand segment du côté AB divisé en moyenne et extrême raison (*).

Note. — Autres solutions de MM. Lez; Lacombe; Leinchugel, étudiant en Mathématiques.

(*) Pour qu'il en soit ainsi, il n'est pas nécessaire que le triangle ABC soit équilatéral : il suffit que AB = BC. (*Note du Rédacteur.*)

QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL (ANNÉE 1878)

(voir p. 233);

Rhétorique.

SOLUTION DE M. LANNES,
Élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Tarbes.

Déterminer sur un diamètre AB *d'une sphère, de rayon* R, *un point tel que, si l'on mène par ce point un plan perpendiculaire à ce diamètre, la surface de la zone sphérique limitée par ce plan et contenant le point* A *soit équivalente à la surface latérale d'un cône qui a pour base le cercle d'intersection de la sphère et du plan, et pour sommet le point* B. *Cela étant, calculer le rapport du volume du cône à celui de la sphère.*

Soit x la distance CP du centre C de la sphère au plan sécant.

La surface de la zone et la surface latérale du cône auront respectivement pour valeurs

$$2\pi R(R-x) \text{ et } \pi\sqrt{2R(R+x)(R^2-x^2)}.$$

En égalant ces deux expressions, il vient

$$2R(R-x)=\sqrt{2R(R+x)(R^2-x^2)};$$

d'où

$$\sqrt{2R(R-x)}\left[\sqrt{2R(R-x)}-(R+x)\right]=0,$$

équation qui est vérifiée par $x=R$, et par

$$x=R(-2\pm\sqrt{5}).$$

La seule valeur de x admissible est $R(\sqrt{5}-2)$.

Il est à remarquer que BP est la plus grande partie du diamètre AB, divisé en moyenne et extrême raison.

Le volume du cône est, dans ce cas, égal à

$$\frac{4}{3}\pi . R^3(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-1),$$

et le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi . R^3$; donc le rapport du volume du cône à celui de la sphère est égal à

$$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-2).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Robaglia et Leinchugel.

CORRESPONDANCE.

1. Sur la question de *calculer les côtés d'un triangle, connaissant les bissectrices intérieures de ses trois angles.*

Un abonné demande s'il en existe une solution *simple;* pour ma part, je n'en connais aucune. On m'a récemment donné communication d'une Note relative à des cas particuliers de cette question; j'en extrais ce qui suit.

« *Désignons par* a, b, c *les côtés, et par* α, β, γ *les bissectrices des angles opposés* A, B, C; *on a les trois équations*

$$(1)\qquad bc[(b+c)^2-a^2]=\alpha^2(b+c)^2,$$

$$(2)\qquad ac[(a+c)^2-b^2]=\beta^2(a+c)^2,$$

$$(3)\qquad ab[(a+b)^2-c^2]=\gamma^2(a+b)^2.$$

Si α, *par exemple, au lieu d'être la bissectrice de* A,

était la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire, il faudrait, dans l'égalité (1), *changer* b *en* $-b$, *ou* c *en* $-c$. *Il en résulte que, si du système proposé on déduit une valeur négative pour l'un des côtés,* c *par exemple, la valeur absolue de ce côté se rapportera au cas où les bissectrices des angles* A *et* B *seraient remplacées par les bissectrices des angles supplémentaires. Ce cas est d'ailleurs le seul à considérer, car les équations* (1), (2), (3) *ne changent pas lorsqu'on change simultanément les signes de* a, b, c.

Supposons $\alpha = \beta$. *Si* α, β *sont deux bissectrices de même espèce, toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures, on démontre en Géométrie que* $a = b$ (*).

En supposant $\alpha = \beta$ *et* $a = b$, *les équations* (1) *et* (2) *se réduisent à une seule*

$$ac^2(2a + c) = \alpha^2(a + c)^2, \tag{4}$$

et l'équation (3) *devient*

$$4a^2 - c^2 = 4\gamma^2. \tag{5}$$

L'équation (4) *peut s'écrire*

$$2a^2c^2 - \alpha^2(a^2 + c^2) = ac(2\alpha^2 - c^2),$$

et, en remplaçant c^2 *par sa valeur tirée de l'équation* (5),

$$8a^2(a^2 - \gamma^2) - \alpha^2(5a^2 - 4\gamma^2) = 2ac(\alpha^2 - 2a^2 + 2\gamma^2),$$

d'où

$$c = \frac{8a^2(a^2 - \gamma^2) - \alpha^2(5a^2 - 4\gamma^2)}{2a(\alpha^2 - 2a^2 + 2\gamma^2)}. \tag{6}$$

(*) On admet, sans doute, ici que les bissectrices *extérieures* α, β sont à partir des sommets A, B, dirigées toutes deux d'un même côté de la droite AB, car autrement l'égalité de ces deux bissectrices n'entraînerait pas celle des côtés a, b. (G.)

Portant cette valeur de c dans l'équation (5), *on obtient l'équation en a*

$$(7)\quad \begin{cases} 16a^2(a^2-\gamma^2)(\alpha^2-2a^2+2\gamma^2)^2 \\ \quad -[8a^2(a^2-\gamma^2)-\alpha^2(5a^2-4\gamma^2)]^2=0. \end{cases}$$

Le terme en a^8 disparaît, et l'on a une équation du sixième degré qui ne contient l'inconnue a qu'à des puissances paires.

Il n'est rien dit, dans la Note, des racines de cette équation du sixième degré. On y suppose $\alpha=\gamma$, et alors, au moyen de calculs qui exigent quelques développements, on déduit de l'équation (7) ces trois valeurs de a^2

$$\frac{4\alpha^2}{3},\quad \left(\frac{13+\sqrt{425}}{32}\right)\alpha^2,\quad \left(\frac{13-\sqrt{425}}{32}\right)\alpha^2;$$

la troisième, étant négative, correspond à des solutions imaginaires.

Pour $a^2=\frac{4\alpha^2}{3}$, l'équation (6) donne $c=a$; le triangle est équilatéral.

La valeur de c correspondante à $a^2=\left(\frac{13+\sqrt{425}}{32}\right)\alpha^2$ est négative; *cette solution se rapporte au cas particulier où l'on considère les bissectrices extérieures des angles* A, B, *et la bissectrice intérieure de l'angle* C.

Note du Rédacteur. — Lorsque $\alpha=\beta$ et $a=b$, en prenant pour inconnue auxiliaire le rapport $\frac{a}{c}$, on obtient assez simplement une équation du troisième degré dont la discussion est facile.

La division de l'équation (5) par l'équation (4), membre à membre, donne

$$\frac{2a-c}{ac^2}=\frac{4\gamma^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{(a+c)^2},$$

et, si l'on pose $\frac{a}{c}=x$, ou $a=cx$ et $\frac{\gamma}{\alpha}=m$, il vient

$$\frac{2cx-c}{c^2x}=\frac{4m^2}{(cx+c)^2},$$

d'où

$$\frac{2x-1}{x}=\frac{4m^2}{(x+1)^2},\quad (2x-1)(x+1)^2=4m^2x$$

et, par suite,

(1′) $$2x^3+3x^2-4m^2x-1=0.$$

Cette dernière équation a une racine positive plus grande que $\frac{1}{2}$, et deux racines négatives dont les valeurs absolues sont, l'une plus petite que 1, et l'autre plus grande.

Soit h la racine positive; à cette racine h correspond $a=ch$; et des égalités $a=ch$ et (5) $4a^2-c^2=4\gamma^2$ on tire

$$4c^2h^2-c^2=4\gamma^2,\quad c=\frac{2\gamma}{\sqrt{4h^2-1}},\quad a=\frac{2h\gamma}{\sqrt{4h^2-1}}.$$

Ces valeurs de c et a sont réelles, positives et finies, puisque l'on a $h>\frac{1}{2}$.

Ainsi, quelles que soient les valeurs attribuées aux bissectrices intérieures α, γ, la question admet une solution réelle, et une seule.

Quand $\alpha=\gamma$, $m=1$, $h=1$, $c=\frac{2\gamma}{\sqrt{3}}=a$. Le triangle est équilatéral.

Si $m=\frac{1}{2}$, ou $\alpha=2\gamma$, l'équation (1′) devient $2x^3+3x^2-x-1=0$, ou $(2x+1)(x^2+x-1)=0$; la racine positive $h=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; il en résulte $c=\frac{2\gamma}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$, $a=\frac{\gamma(-1+\sqrt{5})}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$, et $c=a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; donc c est le côté d'un décagone étoilé inscrit dans le cercle dont le rayon est a. Par conséquent, $A=36^\circ$, $B=36^\circ$, $C=108^\circ$.

Les deux racines négatives de l'équation (1′), changées de signe, prises en valeur absolue, répondent à cette autre question : *Déterminer les côtés d'un triangle isoscèle* CAB, *connaissant les bissectrices extérieures* α, β *des deux angles égaux* A, B, *et la bissectrice intérieure* γ *du troisième angle* C.

Car, en prenant pour inconnue, x, le rapport $\frac{a}{c}$, la question conduit à l'équation

(2′) $$2x^3-3x^2-4m^2x+1=0,$$

qu'on obtient en remplaçant x par $-x$, dans l'équation

(1′) $$2x^3+3x^2-4m^2x-1=0,$$

relative aux trois bissectrices intérieures.

On a encore l'égalité (5) $4a^2-c^2=4\gamma^2$, et, comme $a=cx$, il s'ensuit

$$(4x^2-1)c^2=4\gamma^2,\quad c=\frac{2\gamma}{\sqrt{4x^2-1}},\quad a=\frac{2\gamma x}{\sqrt{4x^2-1}}.$$

Pour que ces valeurs de a et c soient réelles, positives et finies, il faut et il suffit que la valeur de x surpasse $\frac{1}{2}$. C'est dire que le nombre des solutions réelles de la question proposée est égal au nombre des racines de l'équation (2'), supérieures à $\frac{1}{2}$. Or, cette équation a, quel que soit m, ou $\frac{\gamma}{\alpha}$, deux racines positives, l'une plus grande que l'unité et l'autre comprise entre 0 et 1. La première, que nous désignerons par x_1, donne la solution

$$c = \frac{2\gamma}{\sqrt{4x_1^2 - 1}}, \quad a = \frac{2\gamma x_1}{\sqrt{4x_1^2 - 1}}.$$

Quant à la racine comprise entre 0 et 1, elle ne surpassera $\frac{1}{2}$ que si l'on a $m < \frac{1}{2}$, comme il est facile de s'en assurer.

Donc le nombre des solutions de la question proposée sera 2, ou seulement 1, suivant qu'on aura $\alpha > 2.\gamma$, ou $\alpha \leqq 2.\gamma$.

Lorsque $\gamma = \alpha$, $m = 1$, et l'équation (2') devient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = (x+1)(2x^2 - 5x + 1) = 0.$$

La racine positive $x_1 > \frac{1}{2}$ est égale à $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$, et les côtés c, a ont, respectivement, pour valeurs

$$\frac{4\gamma}{\sqrt{38+10\sqrt{17}}}, \quad \frac{(5+\sqrt{17})\gamma}{\sqrt{38+10\sqrt{17}}}.$$

Si $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $m = \frac{1}{2}$; l'équation (2') se réduisant à

$$2x^3 - 3x^2 - x + 1 = (1 - 2x)(x^2 - x - 1) = 0,$$

on a

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c = \frac{2\gamma}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}, \quad a = \frac{(1+\sqrt{5})\gamma}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

et

$$c = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Cette dernière égalité montre que c est le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle dont le rayon est a; donc

$$A = 72^\circ, \quad B = 72^\circ, \quad C = 36^\circ.$$

(G.)

2. M. Alfred Germot a résolu la question du Concours d'admission à l'École Normale, dont une solution a été insérée dans le numéro de juin, page 283.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*, Socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, Socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo XI (1878).

Gennaio. — Intorno alla vita ed ai lavori di Giovanni Santini. Memoria di *Elia Millosevich*, professore di Astronomia nautica nel R. Istituto di Marina mercantile di Venezia.

Febraio. — Intorno alla vita ed ai lavori di Giovanni Santini. Memoria di *Elia Millosevich*, professore di Astronomia nautica nel R. Istituto di Marina mercantile di Venezia. (Fine.)

Brano di lettera del Prof. *Angelo Genocchi* a *D.-B. Boncompagni*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Marzo. — Storia del principio della minima azione. Prelezione accademica del Dr *Adolfo Mayer*. Traduzione dal tedesco dell' Ingr *G.-B. Biadego*.

Nuove Copernicana da *Upsal*. Rapporto letto alla Società Copernicana di Scienze ed Arti in Thorn, il 4 giugno 1877, da *Massimiliano Curtze*. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*.

Giunte ed annotazioni alle « Nuove Copernicana da Upsal ». Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*.— M. Curtze.

I sei Cartelli di Matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche, di *Lodovico Ferrari*, coi sei contro-cartelli in risposta, di *Nicolò Tartaglia*, com-

prendenti le soluzioni de' quesiti dall' una e dall' altra parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da *Enrico Giordani* (Bolognese). Premesse Notizie bibliografiche ed illustrazioni sui Cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. *Silvestro Gherardi*, Preside dell'Istit. tecn. prov. di Firenze. Milano, 1876. R. Stabilimento litografico di *Luigi Ronchi*, e tipografia degl' ingegneri. In-8°, di 220 pagine. — Dr *Maurizio Cantor.*

Aprile. — Il Carteggio fra *Lagrange* ed *Euler;* per *Maurizio Cantor.* Traduzione dal tedesco del Prof. *Antonio Favaro.*

Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par *Ph. Gilbert,* professeur à l'Université catholique de Louvain. Bruxelles, F. Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique ; 1878. In-8° de 98 pages. — *F. Siacci.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio. — Lehrbuch der Determinanten-Theorie, für Studirende, von Dr *Siegmund Günther,* K. Bayr. Gymnasial-Professor, Mitglied der *Leop.-Karol.* Akademie d. naturforscher, u. (C.) D. K. Böhm. Gesellsch. der Wissenschaften Zweite, durchaus umgearbeitete vermehrte und durch eine Aufgaben-Sammlung bereicherte Auflage. Erlangen, 1877. Verlag von Eduard Besold. — Dott. *Giovani Garbieri.*

Giugno.—Intorno alla pubblicazione fatta dal Dr *Carlo Malagola* di alcuni documenti relativi a *Nicolò Copernico,* e ad altri astronomi e matematici dei secoli xv e xvi. — Nota del Prof. *Antonio Favaro.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Luglio. — Notice sur un pamphlet mathématique hollandais intitulé : « Bril voor de Amsterdamsche belachelycke geometristen, 1663 » ; par le Dr *Bierens de Haan.*

Agosto. — Nécrologie de *Joseph-Ivanovitch Somoff*, par M. *André Smotoff.* Traduit du russe par M. *J. Houël.*

Catalogo dei lavori del Prof. *G.-I. Somoff.* — *B. Boncompagni.*

Intorno ad una Lettera del Prof. *G.-I. Somoff.* — *B. Boncompagni.*

Lettera del Prof. *G.-I. Somoff* a B. Boncompagni.

Soluzione della « question 391 » della *Nouvelle Correspondance mathématique.* » — *B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SETTEMBRE. — Notizie storiche intorno all' invenzione del termometro. — *Raffaello Caverni.*

OTTOBRE. — Intorno a due Lettere del P. Abate D. *Benedetto Castelli,* Monaco Cassinese a Monsignore D. *Ferdinando Cesarini.* — *B. Boncompagni.*

Due Lettere del P. Abate D. *Benedetto Castelli* a Monsignore D. *Ferdinando Cesarini.*

Castelli (*Benedetto*).— Articolo inedito dell' Opera del conte *Giovanni-Maria Mazzuchelli,* intitolata : « *Gli scrittori d'Italia* (Codice Vaticano, n° 9266, carte 221-228).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

NOVEMBRE. — Della vita e degli scritti fisico-matematici di *Ermanno Grasmann;* per *Antonio Favaro,* professore nella R. Università di Padova.

Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. Sechszehnter Band. Geschichte der Astronomie, auf Veranlassung und mit Unterstützung Seiner Majestät des Königs von Bayern, Maximilian II, herausgegeben durch die historische Commission bei der Königl. Academie der Wissenschaften. Munchen, 1877. Druck und Verlag von R. Oldenborg. — Geschichte der Astronomie, von *Rudolf Wolf.* Auf Veranlassung und mit Unterstützung Seiner Majestät des Königs von Bayern, Maximilian II, herausgegeben durch die historische Commission bei der Königl. Academie der Wissenschaften. Munchen, 1877. Druck und Verlag von R. Oldenborg. In-8° di 832 pagine (XVI, 816). — *A. Favaro.*

Grundlinien der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie, zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen, von Dr *Siegmund Günther,* Professor am Gymnasium in Ansbach. München,

Theodor Ackermann, 1878. In-8° di 136 pagine (VIII, 128). — *A. Favaro.*

Dicembre. — Sur la série récurrente de *Fermat*, par M. *Edouard Lucas*, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, à Paris.

La Storia delle Matematiche nella Università di Padova. Lettera del Prof. *Antonio Favaro* a *D.-B. Boncompagni.*

Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben, von Dr *Mansion*, Professor an der Universität zu Gent. Leipzig, Druck und Verlag von *B.-G. Teubner*; 1878. In-8° di 55 pagine (VI, 49). — Dr *Giovanni Garbieri.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

2. Atti della R. Accademia dei Lincei (1878-79).
Transunti. — Volume III.
Fascicolo 4°. — Marzo 1879.
Fascicolo 5°. — Aprile 1879.
Fascicolo 6°. — Maggio 1879.
Roma, coi tipi del Salviucci (1879).

3. *Quindicesima Rivista di Giornali.* Lettura fatta al R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti nel gennaio 1879, dal Prof. *Giusto Bellavitis*, Membro eff. dell' Istituto stesso.

4. *The Analyst.* A journal of pure and applied Mathematics. Edited and published by *J.-E. Hendricks*, A. M. (May 1879). Des Moines, Iowa, Mills et Co, Book and Job printers, 1879.

5. *Leçons sur la Géométrie*, par *Alfred Clebsch*, recueillies et complétées par *Ferdinand Lindemann*, professeur à l'Université de Fribourg en Brisgau. Traduites par *Adolphe Benoist*, docteur en droit, Membre de la Société mathématique de France.

Tome Ier. — *Traité des sections coniques et introduction à la théorie des formes algébriques*. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Grands-Augustins, 55 ; 1879. Prix : 12 francs.

6. *Cours de Calcul infinitésimal*, par *J. Hoüel*, professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Tome II. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Grands-Augustins, 55. Prix : 15 francs.

7. *Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées*, par M. *Ch. Méray*, ancien élève de l'École Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Extrait du numéro de mars 1879 des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, publiées sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de Conférences de l'École. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Grands-Augustins, 55 ; 1879.

8. *Précis d'un Traité de Statique dans lequel les couples sont remplacés par les leviers de rotation;* par M. *E. Brassinne*, ancien professeur aux Écoles d'artillerie, Inspecteur de l'Ecole des Beaux-Arts et Sciences industrielles de Toulouse. Toulouse, imprimerie Douladoure, rue Saint-Rome, 39 ; 1879.

9. *La racine cubique obtenue par la méthode des interpolations successives applicable à l'extraction de la racine carrée, ou l'extraction des racines presque réduite à quelques soustractions. Ouvrage suivi d'une*

Note sur une autre méthode entièrement nouvelle, de même que la première, par M. *Michel Laporte,* professeur du Cours municipal de Géométrie et de Mécanique appliquées aux arts de la ville de Bordeaux. — Prix : 1 fr. 50. Paris, Ch. Delagrave, éditeur, rue Soufflot, 15. Bordeaux, Feret et fils, libraires-éditeurs, rue de l'Intendance, 15 ; 1879.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1259

(voir 2e série, t. XVII, p. 238);

PAR M. MORET-BLANC.

Si l'on développe l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n$ *suivant les puissances de* α : 1° *le développement aura toujours un nombre impair de termes ;* 2° *les coefficients de la lettre ordonnatrice des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux ;* 3° *si l'on égale à zéro ces coefficients, qui sont des polynômes entiers et rationnels en* x, *ils ont toutes leurs racines imaginaires lorsqu'ils sont de degré pair, et ils renferment, en outre, une racine nulle lorsqu'ils sont de degré pair.*

(ESCARY.)

1° Le développement est un polynôme en α de degré $2n$, qui a $2n+1$ termes ; nous verrons qu'aucun coefficient n'est nul.

2° L'équation en α, $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n = 0$, est réci-

proque : donc les coefficients des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux.

3° $(1-2\alpha x+\alpha^2)^n$

$$= (1+\alpha^2)^n - \frac{n}{1}2\alpha x(1+\alpha^2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}4\alpha^2x^2(1+\alpha^2)^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}8\alpha^3x^3(1+\alpha^2)^{n-3}+\ldots.$$

Remarquons d'abord que le développement de $(1+\alpha^2)^n$ renferme toutes les puissances paires de α, depuis α^0 jusqu'à α^{2n}.

Cela posé, le coefficient d'une puissance paire de α est un ploynôme de degré pair en x, et composé de termes tous positifs et de degrés pairs ; il renferme un terme indépendant de x : donc ce coefficient ne s'annule pour aucune valeur réelle de x.

Le coefficient d'une puissance impaire de α est un polynôme en x de degré impair, composé de termes tous négatifs et de degrés impairs, dont un du premier degré ; donc ce coefficient s'annule pour $x=0$, et ne s'annule pour aucune autre valeur.

Note. — Solutions analogues de MM. Sondat ; de Virieu ; Beaugey et Manipoud, élèves du lycée de Grenoble.

Question 1268

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 287) ;

PAR M. H. LEZ.

Lieu du point de la tangente à l'hypocycloïde

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$$

qui est conjugué harmonique du point de contact par rapport aux axes de coordonnées.

(Gambey.)

On sait que la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$ est l'enveloppe d'une droite AB de longueur r, dont les deux extrémités A, B glissent sur deux axes rectangulaires OX, OY, et que le point de contact C est le pied de la perpendiculaire menée à AB, du quatrième sommet M du rectangle AOBM construit sur OA et OB (*). Il résulte de cette construction qu'en désignant par a et b les distances variables OA, OB, le point de contact C a pour coordonnées $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$; et les droites AB, OC, respectivement, pour équations

$$(1) \qquad bx + ay = ab,$$

$$(2) \qquad b^3x - a^3y = 0$$

L'équation de la droite OD, conjuguée harmonique de OC par rapport aux axes de coordonnées, est

$$(3) \qquad b^3x + a^3y = 0.$$

En éliminant a et b entre les équations (1), (3), et $a^2 + b^2 = r^2$, on aura l'équation du lieu proposé.

Des équations (1) et (3) on tire

$$(b - y)^3 = -x^2y, \quad (a - x)^3 = -y^2x,$$

d'où

$$a = x - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad b = y - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}};$$

la substitution de ces expressions de a et b, dans l'égalité $a^2 + b^2 = r^2$, donne l'équation

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = r^2,$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

qu'on peut mettre sous la forme

$$(x^2+y^2-r^2)^3 = x^2y^2\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

Le lieu passant par les points

$$x = \pm r,\quad y = \pm r\sqrt{2 \pm \sqrt{5}}$$

et

$$x = \pm \frac{r}{\sqrt{3}},\quad y = \pm 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

comprend quatre branches doubles, indéfinies, symétriques par rapport aux axes coordonnés qu'elles touchent en se réunissant à une distance r de l'origine O.

Les différents points de ce lieu répondant directement à la question se construisent facilement. Il suffit de décrire un cercle sur $AB = r$, comme diamètre; puis de mener par le point M, sommet du rectangle inscrit AOBM, une tangente MD, qui rencontrera AB en un point D, conjugué harmonique de C, par rapport aux points A et B.

Note. — La même question a été résolue par MM. Fauquembergue; Moret-Blanc; Sondat; Pisani; Chambon; E. Rodier et Eugène Delmas, élèves de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

Question 1282

(voir 2e série, t. XVII, p. 384);

PAR M. ALBERT LACAZETTE,
Élève du lycée de Bordeaux.

Si d'un point B *d'une hyperbole équilatère dont le centre est* O *on abaisse une perpendiculaire* BC *sur une tangente en* A, *l'angle* COA *est double de* CAB.

(A. CAMBIER.)

Soit I le milieu de AB; on sait que les quatre points A, C, O, I sont sur une même circonférence. Par suite, l'angle COA et l'angle CIA sont égaux comme inscrits dans un même, segment. Mais, CI étant une médiane du triangle CAB rectangle en C, l'angle

$$\text{CIA} = 180^\circ - 2\,\text{CAB};$$

donc

$$\text{COA} = 180^\circ - 2\,\text{CAB} = 2(90^\circ - \text{CAB})\ (^*).$$

Note. — M. Charvet, élève du lycée de Grenoble, donne une solution fondée sur ce lemme :

Si par deux points A, B *d'une hyperbole équilatère, non situés sur une même branche, on fait passer une circonférence, ayant* AB *pour diamètre, la seconde corde d'intersection passe par le centre de l'hyperbole.*

En faisant application de ce lemme à la question proposée, M. Charvet distingue deux cas, suivant que les points B, A appartiennent à une même branche de l'hyperbole, ou à deux branches différentes; dans le premier cas, l'angle COA est double de CAB; dans le second, l'angle COA est double du complément de CAB.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Pisani.

Question 1284

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 384);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

On décrit tous les cercles simplement tangents à une conique B *en un point* C. *On mène à chacun de ces cercles des tangentes parallèles à deux diamètres fixes de la conique ; trouver le lieu géométrique des points* M *d'intersection de ces tangentes.*

(BARBARIN.)

(*) Quand les points A, B appartiennent à une même branche de l'hyperbole, les angles COA, CIA sont supplémentaires, et c'est alors que COA = 2 CAB. (*Note du rédacteur.*)

Tous ces cercles sont homothétiques, et le point C est le centre d'homothétie. Or, on sait que les tangentes homologues de deux cercles homothétiques sont parallèles; les points d'intersection de deux systèmes de tangentes homologues sont donc homothétiques, c'est-à-dire qu'ils se trouvent sur une droite passant par le point C; et, comme à chacune des deux directions données correspond un couple de tangentes, il y a quatre points d'intersection qui sont les sommets d'un parallélogramme; donc le lieu des points M se compose de quatre droites issues du point C.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; Moret-Blanc; Albert Lacazette, élève du lycée de Bordeaux; L. Julliard, du lycée Corneille, à Rouen.

Question 1288

(voir 2e série, t. XVII, p. 479);

PAR M. GAMBEY.

Une parabole P, *de paramètre constant, se meut dans son plan parallèlement à elle-même, de façon que chacun de ses points décrive une parabole* P′ *de paramètre donné, dont l'axe soit parallèle à celui de la parabole mobile. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe donné, par rapport à la parabole* P.

Même question en supposant la parabole P′ *remplacée par une droite de direction quelconque.*

(LAISANT.)

La parabole fixe P′ que décrit le sommet de la parabole P ayant pour équation

$$y^2 = 2p'x,$$

cette dernière sera, par rapport aux mêmes axes, repré-

sentée par

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha),$$

$2p$ étant son paramètre, et α, β les coordonnées du point d'intersection.

La polaire d'un point (a, b) par rapport à P a pour équation

$$(1)\qquad \beta^2 - \beta(y+b) + 2p\alpha - p(x+a) + by = 0,$$

avec la relation

$$(2)\qquad \beta^2 - 2p'\alpha = 0.$$

L'enveloppe de (1) s'obtiendra en écrivant d'abord que les dérivées par rapport à α et à β sont proportionnelles dans les relations (1) et (2), ce qui donne

$$(3)\qquad \frac{p}{p'} = \frac{y+b-2\beta}{2\beta}.$$

Ensuite il faudra éliminer α et β entre (1), (2) et (3). Cette élimination n'a rien de difficile et conduit à

$$(y+b)^2 + \frac{4(p+p')}{p'}(px - by + pa) = 0,$$

équation d'une autre parabole dont l'axe est parallèle à ceux des précédentes.

Si la parabole P' est remplacée par une droite donnée, on rapportera la parabole P à celui de ses diamètres qui est conjugué de la direction donnée. Son équation sera alors, avec un seul paramètre variable,

$$(y-\beta)^2 - 2px = 0.$$

La méthode précédente conduira à l'équation

$$(y+b)^2 + 4p(x+a) - 4by = 0,$$

qui représente encore une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe de P, et dont le paramètre est double.

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Fauquembergue; Ferdinando Pisani; Robaglia; J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; Julliard, élève du lycée Corneille, à Rouen.

M. Robaglia a donné une solution géométrique.

Question 1291

(voir 2e série, t. XVII, p. 480);

PAR M. ROMERO.

L'équation $x^4+x^3+x^2+x-1=y^2$ est impossible en nombres entiers et positifs.

Dans toute solution en nombres entiers de cette équation, y étant nécessairement *impair,* l'équation proposée peut s'écrire

$$(1)\qquad x(x+1)(x^2+1)=2[m^2+(m+1)^2].$$

x ne peut avoir aucune des formes $4n$, $4n\pm 1$, parce qu'il en résulterait que le premier membre serait multiple de 4, tandis que le second membre ne contient le facteur 2 qu'à la première puissance. Donc x est de la forme $4n+2$, et par suite l'équation (1) devient, en divisant ses deux membres par 2,

$$(2n+1)(4n+3)[(2n+1)^2.4+1]=m^2+(m+1)^2,$$

où $4n+3$ est diviseur de la somme $m^2+(m+1)^2$ de deux carrés premiers entre eux; mais on sait qu'un nombre de la forme $4n+3$ ne peut être égal à la somme de deux carrés : donc l'équation proposée est impossible en nombres entiers et *positifs*.

Note. — La même question a été résolue par MM. Meyl et Moret-Blanc. M. Meyl a démontré, de plus, que l'équation admet seulement les solutions entières négatives : $x=-2$, $y=\pm 3$.

Question 1293

(voir 2e série, t. XVII, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube. (LAISANT.)

Le nombre et son cube divisés par 9 doivent donner le même reste; un cube étant nécessairement de l'une des formes $9m, 9m - 1, 9m + 1$, il en est de même des nombres satisfaisant à la condition posée.

Ces nombres ne peuvent se trouver que parmi les nombres d'un ou deux chiffres, car, le cube d'un nombre de trois chiffres ayant au plus neuf chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à $81 < 100$.

Le cube d'un nombre de deux chiffres ayant au plus six chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à 54.

Il faut exclure 53, dont le cube est terminé par 7, la somme des chiffres ne pouvant excéder 52; de même que 44, 45, 46, dont le cube, composé de cinq chiffres, est terminé par 4, 5 ou 6, la somme des chiffres ne peut excéder 42.

En formant les cubes des nombres de forme $9m - 1$, $9m, 9m + 1$ de 1 à 37, on trouve les solutions suivantes :

Nombres....	1,	8,	17,	18,	26,	27.
Cubes......	1,	512,	4913,	5832,	17576,	19683.

Il n'y a pas d'autre solution.

Note. — Solution analogue de M. de Virieu.

Question 1294

(voir 2e série, t. XVII, p. 480);

Par M. A. LAISANT.

Démontrer que la somme des inverses de n nombres positifs en progression arithmétique excède le quotient de n^2 par la somme des termes de la progression.

Déduire de cette proposition la divergence de la série

$$(a)\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)\\ \qquad\qquad+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\end{array}\right.$$

(Lionnet.)

La première partie de l'énoncé qui précède n'est pas assez générale. Il n'est nullement nécessaire que les n nombres soient en progression arithmétique; il suffit qu'ils soient positifs. Désignons, en effet, ces nombres par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On sait, et il est facile de le démontrer, que *leur moyenne arithmétique* A *est supérieure à leur moyenne géométrique* G; appliquant cette même propriété à leurs inverses, nous avons

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}>\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}>\frac{1}{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}.$$

Donc

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Plus directement, si l'on fait le produit de

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

par $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, on obtient n^2 termes

$$\begin{array}{cccc} 1, & \frac{a_2}{a_1}, & \ldots, & \frac{a_n}{a_1}, \\ \frac{a_1}{a_2}, & 1, & \ldots, & \frac{a_n}{a_2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_1}{a_n}, & \frac{a_2}{a_n}, & \ldots, & 1, \end{array}$$

dont les uns sont égaux à l'unité et dont les autres se groupent deux à deux suivant la forme $\frac{a_i}{a_k} + \frac{a_k}{a_i} > 2$. Le produit est donc plus grand que le résultat qu'on obtiendrait en remplaçant tous les termes par l'unité, dans le Tableau précédent, c'est-à-dire que n^2.

Quant à la série proposée, on voit que les sommes des dénominateurs des termes positifs entre parenthèses sont respectivement

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ \ldots.$$

Donc la somme de la série est plus grande que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2^2}{2^3} - \frac{1}{2.2}\right) + \left(\frac{3^2}{3^3} - \frac{1}{2.3}\right) + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right).$$

Cette somme croît, comme l'on sait, au delà de toute limite. La série est donc divergente.

M. Bertrand, dans son *Traité de Calcul différentiel* (p. 250) démontre la convergence de la série

$$(b)\quad \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots,$$

dont la somme est égale à $\frac{3}{2}\log 2$. La comparaison des

séries (a) et (b) nous montre donc un nouvel et intéressant exemple de l'influence du groupement des termes sur la convergence.

Il est évident, par ce qui précède, que la série ci-dessous est elle-même divergente si α est une quantité positive déterminée, inférieure à l'unité :

$$(1-\alpha)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{\alpha}{3}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{\alpha}{4}\right)+\ldots.$$

La somme est supérieure à $(1-\alpha)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$.

Remarques. — I. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont en progression arithmétique, on a la formule plus simple

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}.$$

II. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont en progression harmonique, il vient

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; de Virieu; Fauquembergue; Moret-Blanc; L. Fourcade et P. Anthoine, élèves en Mathématiques spéciales au collége Rollin, classe de M. Ribout; Boell, élève du lycée du Havre.

Question 1303

(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. A.-J.-F. MEYL,

Ancien capitaine d'artillerie à La Haye.

Trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$x^2+7x=2y(y+3)(y^2+3y+5).$$

(LIONNET.)

En multipliant cette équation par 2, elle peut s'écrire

$$2x^2 + 14x = (2y^2 + 6y + 5 - 5)(2y^2 + 6y + 5 + 5),$$

ou bien

$$2x^2 + 14x + 25 = (2y^2 + 6y + 5)^2,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(x+3)^2 + (x+4)^2 = [(y+1)^2 + (y+2)^2]^2.$$

Or, d'après le théorème de M. de Jonquières (*voir* 2ᵉ série, t. XVII, p. 307, etc.), cette équation n'admet que les valeurs $x+3=3$ et $x+3=-4$, à chacune desquelles correspondent les deux valeurs $y+1=1$ et $y+1=-2$. On a donc les quatre solutions

$$\left.\begin{array}{l} x=0, \\ x=-7, \end{array}\right\} y=0, \quad y=-3.$$

Mais, en considérant la seule solution impropre de l'équation du théorème précité, savoir

$$(0)^2 + (\pm 1)^2 = [(0)^2 + (\pm 1)^2]^2,$$

on a encore les solutions $x+3=0$ et $x+3=-1$, à chacune desquelles correspondent les deux valeurs $y+1=0$ et $y+1=-1$, ce qui donne encore les quatre solutions

$$\left.\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-4, \end{array}\right\} y=-1, \quad y=-2.$$

Ces huit solutions sont les seules possibles.

Le second système de ces solutions est fourni immédiatement par l'inspection de l'équation donnée; en ajoutant à chaque membre de cette équation le nombre 12, on trouve sans difficulté

$$(x+3)(x+4) = 2(y+1)(y+2)(y^2+3y+3),$$

qui donne le second système.

Question 1304
(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. C. BOELL,
Élève du lycée du Havre.

La somme des distances du centre du cercle circonscrit aux deux côtés AB, AC *du triangle inscrit*, ABC, *est égale à la corde menée par le point* C, *perpendiculairement à* AC *dans le cercle décrit sur* DC, *comme diamètre*, D *étant le milieu de l'arc* BC.

(A. CAMBIER.)

Soient OM, ON les distances du centre O, aux deux côtés AB, AC, et CP la corde du cercle décrit sur DC, comme diamètre, perpendiculairement à AC [*].

Prolongeons la droite PD qui est parallèle à CA, jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Soit OR la distance du centre O à la corde DE; OR est le prolongement de ON, et la droite RN est égale et parallèle à PC. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que OM = OR.

Or les deux arcs CD, AE sont égaux, comme compris entre les parallèles AC, ED; d'autre part, l'arc CD = l'arc DB : donc arc AE = arc DB, et, en ajoutant aux deux membres de l'égalité l'arc EB, on a

arc AB = arc ED.

L'égalité des arcs entraîne celle des cordes AB, ED, et, par suite, l'égalité des distances OM, OR. Le théorème est donc démontré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Ferdinand Pisani; Robaglia; Fabry, du collége Chaptal; Paul Le Roux et R. Wolf, élèves au Lycée de Rennes; Albert Renou, élève du Lycée de Caen; Louis Cauret, et par un anonyme.

---

[*] Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTIONS.

1311. Quatre nombres entiers α, β, γ, δ, positifs ou négatifs, étant donnés, soit fait, pour abréger,

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$Q = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha(\beta + \gamma + \delta),$$
$$R = \gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 - \beta(\gamma + \delta + \alpha),$$
$$S = \delta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma(\delta + \alpha + \beta).$$

On peut démontrer, par un calcul direct, que le nombre

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

est le produit de deux facteurs, dont l'un s'exprime par une somme de quatre carrés, et l'autre par une somme de trois carrés. (S. Realis.)

1312. Transformer le produit

$$3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)[(\alpha + \beta)^3 + (\beta + \gamma)^3 + (\gamma + \alpha)^3]$$

en une somme de trois cubes. (S. Realis.)

1313. Un nombre p, qui est la somme de n cubes entiers, étant donné, assigner un nombre q, tel que le produit $p^2 q$ soit la somme algébrique de n cubes entiers. (S. Realis.)

1314. Si, dans un triangle ABC, on a $A \pm B = 90^\circ$, alors

$$2c^{\pm 2} = (a + b)^{\pm 2} + (a - b)^{\pm 2},$$

les signes supérieurs, ou inférieurs, étant pris ensemble.

On demande une démonstration *simple* de cette exten-

sion du théorème de Pythagore. (Extrait du journal anglais *The educational Times.*)

(Donald Mc. Alister, B.A.B.Sc.)

1315. Étant donnés un triangle inscrit ABC et le diamètre DE perpendiculaire à BC, si du point C comme centre, avec la moitié de BC pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre CE en N, que par N on mène NM parallèle à CA et coupant AE en M, il s'agit de démontrer que

$$AM = \frac{AC + AB}{2}.$$

Ce théorème sert à déterminer le grand axe d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

(A. Cambier.)

1316. On prend sur la tangente à une cycloïde fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle au rayon de courbure de ce point; trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur, quand la tangente se déplace. (Barbarin.)

1317. Démontrer que le polynôme

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1$$

est divisible par $(x - 1)^4$. Trouver l'expression générale du quotient. (Genty.)

1318. Trouver un nombre ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs et à celle des carrés de trois entiers consécutifs.

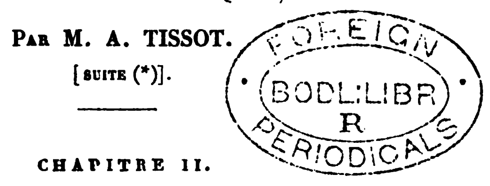
(Lionnet.)

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].



CHAPITRE II.

Recherche du système de projection le mieux approprié à la représentation d'une contrée particulière.

Conditions à remplir. — Notation.

38. Dans la construction d'une carte à grande échelle destinée aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la condition la plus importante à remplir est relative à la reproduction des angles. Il n'est pas nécessaire que le mode de projection les conserve rigoureusement, mais il ne doit les altérer que de quantités assez faibles pour que chaque feuille de la carte constitue un véritable levé topographique.

Les distances étant inévitablement modifiées, l'échelle du dessin variera plus ou moins d'une feuille à l'autre. Il faut rendre cette variation aussi petite que possible en réduisant à son *minimum* la plus grande altération de longueur.

Enfin, avant de tracer le canevas, on aura à calculer les coordonnées d'un nombre considérable de points rapportés à deux axes rectangulaires. Une troisième condi-

(*) *Nouv. Ann.*, 2ᵉ série, t. XVII, p. 351.

tion à laquelle il convient de satisfaire réside dans la simplicité des formules employées à cet usage.

Ces conditions sont aussi celles que l'on doit chercher à réaliser dans la construction d'une carte ordinaire. Le but une fois atteint, non seulement les altérations seront aussi faibles que possible, mais il sera facile d'en tenir compte toutes les fois que l'on aura à faire usage de la carte. Il suffirait pour cela que l'on eût tracé légèrement sur cette carte, et avec une teinte différente de celles des autres lignes, quelques-unes des courbes le long desquelles l'altération de longueur est constante. Nous verrons que ces courbes sont du second degré et presque toujours des ellipses.

39. Sans faire d'abord d'autre hypothèse sur la forme de la surface terrestre, nous la considérerons comme étant de révolution autour de la ligne des pôles, et nous prendrons le rayon équatorial pour unité. Dans l'intérieur du pays à représenter, nous adopterons un point particulier, dit *point central,* dont nous apprendrons plus tard à déterminer exactement la position; le méridien et le parallèle de ce point seront appelés, respectivement, *méridien moyen* et *parallèle moyen*. Sur la carte, nous choisirons, pour origine des coordonnées, l'homologue du point central; l'axe des x sera tangent, et l'axe des y normal à la projection du méridien moyen. Enfin, nous ferons usage de la notation suivante, qui nous a déjà servi en partie :

l latitude d'un point quelconque de la contrée;
m longitude du même point comptée à partir du méridien moyen;
x abscisse, y ordonnée } du point correspondant de la carte;

r rayon du parallèle terrestre à la latitude l;
ρ rayon de courbure du méridien à la même latitude;
N grande normale à la latitude l, ou longueur comprise sur la normale, entre le point considéré et la ligne des pôles;
l_0 latitude du parallèle moyen;
r_0 rayon du parallèle moyen;
ρ_0 rayon de courbure du méridien à la latitude l_0;
N_0 grande normale à la même latitude;
λ excès de la latitude du point considéré sur celle du parallèle moyen;
s arc de méridien compris entre le parallèle moyen et celui de latitude l;
t portion du parallèle moyen comprise entre le méridien moyen et celui de longitude m;
h rapport de longueurs sur le méridien, au point considéré;
k rapport de longueurs sur le parallèle;
θ altération de l'angle du méridien avec le parallèle;
a demi grand axe de l'ellipse indicatrice;
b demi petit axe de la même ellipse;
ω moitié du *maximum* de l'altération d'angle.

Les coordonnées qui déterminent la position d'un point quelconque sur la surface du globe peuvent être l et m, ou λ et m, ou encore s et t. On a d'ailleurs

$$\lambda = l - l_0, \quad t = r_0 m.$$

On a aussi

$$r = \mathrm{N} \cos l, \quad r_0 = \mathrm{N}_0 \cos l_0, \quad ds = \rho\, dl,$$

et, dans le triangle infiniment petit que l'on forme en abaissant, de l'une des extrémités de l'arc ds, une perpendiculaire sur le rayon du parallèle de l'autre extrémité,

$$\frac{dr}{ds} = -\sin l.$$

Carte d'un pays limité dans tous les sens.

40. Nous supposons que la contrée dont on veut dresser la carte est d'une étendue moyenne, comparable à celle de la France, de l'Espagne, etc., de sorte que les valeurs de s et de t restent toujours assez petites. Pour l'Espagne, par exemple, qui se trouve comprise entre les parallèles de 36 et de 44 degrés, et entre deux méridiens dont l'angle est d'environ 12° 40', la plus grande valeur de s est à peu près $\frac{1}{14}$, et celle de t, $\frac{1}{13}$. Alors les coordonnées x et y d'un point quelconque de la carte peuvent être supposées développées en séries convergentes suivant les puissances de s et de t. D'après le choix qui a été fait pour l'origine, ces développements ne contiendront pas de terme indépendant des variables, et, à cause de la direction qui a été donnée à l'axe des x, le terme en s manquera dans y. Il nous reste à déterminer les coefficients des autres termes de manière que le système de projection satisfasse aux conditions qui ont été indiquées plus haut.

41. Des développements de x et de y on déduirait ceux de h, de k et de $\sin\theta$, par les formules

$$h=\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\frac{r_0}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\sin\theta=\frac{r_0}{rhk}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right].$$

Comme la dérivée de y par rapport à s ne renferme pas de terme constant, pour que le premier terme de h soit égal à l'unité, il faut que le coefficient de s, dans x, soit aussi égal à l'unité, et, pour que θ n'ait pas non plus de terme constant, il faut que x ne contienne pas de

terme en t. Alors k se réduit à $\frac{r_0}{r}\left(\frac{dy}{dt}\right)$, saut des termes du premier ordre ou d'ordres plus élevés en s et t. Par conséquent, si, abstraction faite des termes d'un ordre supérieur au premier, on prend x égal à s, et y à $\frac{r}{r_0}t$, l'angle θ et les différences des rapports h et k avec l'unité seront du premier ordre. Cherchons maintenant à les abaisser au second.

42. Le carré de la dérivée de y par rapport à s n'introduit dans h aucun terme du premier ordre; il faut donc que celui de la dérivée de x par rapport à s n'en introduise pas non plus, ce qui exige que x ne renferme ni terme en s^2, ni terme en st.

Un raisonnement analogue appliqué à k prouve que y ne doit contenir ni terme en st, ni terme en t^2. Alors les termes du premier ordre, dans $\sin\theta$, se réduisent à ceux de $\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{r}{r_0^2}\frac{dr}{ds}t$, ou à ceux de $\frac{dx}{dt} - \frac{\sin l_0}{r_0}t$. On les fera disparaître en donnant à t^2, dans le développement de x, le coefficient $\frac{\sin l_0}{2r_0}$. On est ainsi conduit à prendre, abstraction faite des termes du troisième ordre, x égal à $s + \frac{\sin l_0}{2r_0}t^2$, et y à $\frac{r}{r_0}t$.

43. Introduisons maintenant les termes du troisième ordre, en les affectant de coefficients arbitraires, et posons

$$(1)\quad \begin{cases} x = s + \frac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \frac{A}{3}s^3 - Bs^2t + Cst^2 + \frac{D}{3}t^3, \\ y = \frac{r}{r_0}t + \frac{A'}{3}s^3 + B's^2t - C'st^2 + \frac{D'}{3}t^3; \end{cases}$$

on aura, en négligeant les termes d'ordres supérieurs au deuxième,

$$h = 1 + As^2 - 2Bst + \left(C + \frac{\sin^2 l_0}{2r_0^2}\right)t^2,$$

$$k = 1 + \frac{r_0}{r}\left[B's^2 - 2C'st + \left(D' + \frac{r_0^2}{2r^2}\operatorname{tang}^2 l_0\right)t^2\right],$$

$$\sin\theta = \frac{1}{rhk}\left[\left(\sin l_0 - \frac{r_0}{r}\sin l\right)t + (A'r - Br_0)s^2 + 2(B'r + Cr_0)st + (Dr_0 - C'r)t^2\right].$$

Sans modifier le degré de l'approximation, on peut remplacer l par l_0, et r par r_0, dans les coefficients des termes du deuxième ordre de h, k et $\sin\theta$. Quant à $r\sin l$, qui fait partie du coefficient de t dans $\sin\theta$, on lui substituera son développement borné à deux termes, savoir

$$r\sin l = r_0 \sin l_0 + \left(\frac{r_0}{\rho_0}\cos l_0 - \sin^2 l_0\right)s \quad (*).$$

Enfin, jusqu'ici nous avons toujours tenu compte de l'aplatissement, mais il est inutile d'y avoir égard dans les termes du second ordre; nous remplacerons donc, dans ces termes, ρ_0 par l'unité et r_0 par $\cos l_0$. Il vient alors

$$h = 1 + As^2 - 2Bst + \left(C + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 l_0\right)t^2,$$

$$k = 1 + B's^2 - 2C'st + \left(D' + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 l_0\right)t^2,$$

$$\sin\theta = (A' - B)s^2 + 2\left(B' + C - \frac{\cos 2l_0}{2\cos^2 l_0}\right)st + (D - C')t^2.$$

(*) Pour obtenir le coefficient de s dans ce développement, il suffit de prendre la dérivée de $r\sin l$ par rapport à s, puis de faire s égal à zéro; or on a

$$\frac{d(r\sin l)}{ds} = r\frac{d(\sin l)}{dl}\frac{dl}{ds} + \sin l\frac{dr}{ds} = \frac{r}{s}\cos l - \sin^2 l.$$

Nous pouvons faire en sorte que θ et $h - k$ ne soient plus que du troisième ordre; il suffit, pour cela, de poser

$$A' = C' = D = B, \quad B' = A, \quad D' = C, \quad A + C = \frac{\cos 2l_0}{2\cos^2 l_0}.$$

Les formules

$$(a-b)^2 = (h-k)^2 \cos^2\frac{\theta}{2} + (h+k)^2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \sin\omega = \frac{a-b}{a+b}$$

font voir que $a - b$ et ω seront aussi du troisième ordre. Ainsi, A et C étant liés entre eux par la relation

$$(2) \qquad 2(A + C)\cos^2 l_0 = \cos 2l_0,$$

tous les modes de projection que définissent les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2r_0} t^2 + \dfrac{A}{3} s^3 - Bs^2 t + Cst^2 + \dfrac{B}{3} t^3, \\ y = \dfrac{r}{r_0} t + \dfrac{B}{3} s^3 + As^2 t - Bst^2 + \dfrac{C}{3} t^3 \end{cases}$$

possèdent, à l'exclusion des autres systèmes, la double propriété de ne produire que des altérations d'angles du troisième ordre, et des altérations de distances du second. Autour d'un même point, l'altération de l'unité de longueur est sensiblement la même dans toutes les directions; en l'appelant ε, on a

$$(4) \qquad \varepsilon = As^2 - 2Bst + \left(\frac{1}{2} - A\right) t^2.$$

Il est d'ailleurs impossible de l'abaisser au troisième ordre, puisque, dans cette dernière expression, le coefficient de s^2 et celui de t^2 ne sauraient être nuls en même temps.

Système du minimum *de déformation.*

44. Les altérations d'angles sont maintenant devenues négligeables. On pourrait les atténuer davantage, et même les détruire tout à fait, en introduisant, dans les développements de x et de y, des termes d'ordres supérieurs au troisième ; mais ces modifications, qui ne produiraient que des changements peu appréciables, lorsqu'il s'agirait de rapporter les longueurs sur la carte, compliqueraient les formules saus utilité réelle. Ce qu'il importe maintenant, c'est de disposer des coefficients A, B, C, dont deux sont arbitraires, de la constante l_0, enfin de la position du méridien moyen, de manière que la plus grande des valeurs que ε est susceptible de prendre, dans toute l'étendue de la carte, soit aussi faible que possible.

Quelles que soient les valeurs de A et de B, il existera toujours un angle E et une quantité F tels que l'on ait

$$\tang E = \frac{B}{A - \frac{1}{4}}, \quad F - \frac{1}{4} = \left(A - \frac{1}{4}\right) \sec E,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad A - \frac{1}{4} = \left(F - \frac{1}{4}\right) \cos E, \quad B = \left(F - \frac{1}{4}\right) \sin E.$$

Maintenant, au lieu des variables s et t, prenons-en deux autres u et v, liées aux premières par les relations

$$u = s \cos \frac{1}{2} E - t \sin \frac{1}{2} E,$$

$$v = s \sin \frac{1}{2} E + t \cos \frac{1}{2} E,$$

lesquelles donnent

$$s = u \cos \frac{1}{2} E + v \sin \frac{1}{2} E,$$

$$t = v \cos \frac{1}{2} E - u \sin \frac{1}{2} E.$$

En substituant ces dernières expressions à s et à t dans celle de l'altération de l'unité de longueur, on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \left[\frac{1}{4} + \left(A - \frac{1}{4}\right) \cos E + B \sin E\right] u^2 \\ & + 2\left[\left(A - \frac{1}{4}\right) \sin E - B \cos E\right] uv \\ & + \left[\frac{1}{4} - \left(A - \frac{1}{4}\right) \cos E - B \sin E\right] v^2, \end{aligned}$$

puis, en remplaçant $A - \frac{1}{4}$ et B par leurs valeurs en fonction de E et de F,

(6) $$\varepsilon = F u^2 + \left(\frac{1}{2} - F\right) v^2.$$

Remarquons que, si s et t d'une part, u et v de l'autre, constituaient deux systèmes de coordonnées rectangulaires rapportées à la même origine, si de plus l'axe des u faisait avec celui des t un angle égal à $\frac{E}{2}$, les formules ci-dessus qui expriment ε, la première en fonction de s et de t, la seconde en fonction de u et de v, deviendraient, pour chaque valeur attribuée à ε, les deux équations d'une même courbe du second degré, ellipse ou hyperbole, dont les axes seraient situés sur les axes du second système de coordonnées. Enfin, Δ représentant la longueur du diamètre qui est incliné à 45 degrés sur les axes de la courbe, on aurait

(7) $$\varepsilon = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2.$$

Les ellipses correspondraient aux valeurs positives de F qui sont plus petites que $\frac{1}{2}$.

45. Cela posé, considérons l'un quelconque des systèmes de projection qui se trouvent définis par les formules (2) et (3). Des valeurs de A et de B qui lui correspondent, on peut déduire celles de E et de F ; supposons, pour fixer les idées, que cette dernière soit positive et non supérieure à $\frac{1}{2}$. Construisons, à une échelle assez faible, une carte auxiliaire de la contrée en plaçant chaque point d'après deux coordonnées rectangulaires respectivement égales à s et à t. Par l'origine, menons une droite faisant, avec l'axe des t, un angle égal à $\frac{1}{2}$ E, et une seconde droite perpendiculaire à la première. Traçons une ellipse dont les axes se trouvent sur les deux droites et aient leurs carrés inversement proportionnels aux nombres F et $\frac{1}{2}$ — F. Enfin traçons d'autres ellipses homothétiques à la première, et dont la plus grande, que nous appellerons l'*ellipse limite,* enveloppe le contour de la carte auxiliaire, tout en ayant avec lui un ou plusieurs points communs. Chaque ellipse marquera sur cette carte le lieu des points pour chacun desquels l'altération de l'unité de longueur est égale au carré du quart du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes. Nulle pour le centre commun des ellipses, l'altération ira en augmentant peu à peu à mesure que l'on s'écartera de ce point, et atteindra sa plus grande valeur sur l'ellipse limite.

Il est permis de négliger l'aplatissement dans le calcul de l'altération ε, par conséquent aussi dans la construction de la carte auxiliaire, ce qui revient à prendre, pour

coordonnées des divers points de cette carte, non plus s et t, mais λ et $m \cos l_0$; dans la dernière, on peut même remplacer l_0 par une valeur approchée exprimant un nombre exact de degrés ou de demi-degrés et se rapportant à la latitude d'un point de la région centrale du pays. La carte auxiliaire ainsi obtenue sera la même pour tous les modes de projection. Ce qui varierait de l'un à l'autre, ce serait la forme des ellipses dont nous avons fait usage tout à l'heure, la direction de leurs axes et la position de leur centre commun. Il s'agit de déterminer ces éléments de manière que, dans l'ellipse limite, le diamètre également incliné sur les axes soit le plus petit possible.

46. Ayant tracé la carte auxiliaire, ou seulement les quelques portions de son contour que l'on présume devoir être utiles, on construit, d'autre part, des ellipses de formes diverses, en attribuant, par exemple, au rapport des deux axes, les valeurs zéro, un dixième, deux dixièmes, trois dixièmes, etc., jusqu'à un, de manière à passer ainsi graduellement du système de deux droites parallèles à la circonférence. On calque chaque courbe sur une feuille spéciale de papier transparent, et l'on dessine, sur cette feuille, un certain nombre d'autres courbes homothétiques à la première. On applique l'une des feuilles ainsi obtenues sur la carte auxiliaire, puis on la fait glisser et tourner de manière à déplacer, sur cette carte, le centre commun des ellipses de la feuille et à changer la direction de leurs axes, jusqu'à ce que l'on ait trouvé la position dans laquelle l'ellipse limite est la plus petite possible. On mesure alors le diamètre de cette ellipse qui divise en deux parties égales l'angle des axes. On renouvelle les mêmes essais successivement avec les autres feuilles. Celle qui fournit la plus petite longueur pour le

diamètre mesuré correspond au système de projection que l'on cherche, et il est facile de remonter aux formules par lesquelles ce système se trouvera défini.

D'abord, du résultat obtenu par la mesure du diamètre, on déduit la plus grande altération de l'unité de longueur à l'aide de la formule (7). Le rapport du grand axe au petit, dans les ellipses de la feuille, fait connaître F, car, en appelant G ce rapport, on a, d'après l'équation (6),

$$(8) \qquad F = \frac{1}{2(G^2+1)}.$$

La feuille ayant été mise en place sur la carte auxiliaire, le point de cette carte qui se trouve couvert par le centre commun des ellipses donne le point central; sa latitude est l_0; son méridien et son parallèle sont le méridien et le parallèle moyens. En doublant l'angle que fait alors le grand axe des ellipses avec les parallèles de la carte, on obtient l'angle E. Les valeurs de E et de F étant connues, on calcule celles de A et de B par les formules (5), puis celle de C par l'équation (2); il n'y a plus alors qu'à introduire ces valeurs et celle de l_0 dans les formules (3).

47. La comparaison, telle que nous venons de l'effectuer, ne porte que sur les systèmes de projection dans lesquels F est compris entre zéro et $\frac{1}{2}$. Pour une valeur de F négative ou plus grande que $\frac{1}{2}$, les points où la représentation produit la même altération de longueur se répartissent, sur la carte auxiliaire, suivant des hyperboles homothétiques; celles-ci se trouvent nécessairement conjuguées deux à deux, sauf l'une d'elles qui se réduit à un système de deux droites servant aux autres

d'asymptotes. En tout point correspondant à l'une de ces droites, la projection conserve les distances ; pour deux points appartenant respectivement à deux hyperboles conjuguées, l'altération de l'unité de longueur prend des valeurs égales et de signes contraires, mesurées par le carré du quart du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes, diamètre qui est réel dans l'une des deux courbes. On voit d'après cela comment, à l'aide de la carte auxiliaire et de groupes d'hyperboles tracées sur papier transparent, on pourra déterminer le plus avantageux des modes de projection pour lesquels F est négatif ou plus grand que $\frac{1}{2}$. Il ne restera plus qu'à choisir entre ce dernier et celui qu'auront fourni les autres valeurs de F, ce qui se fera sans hésitation, par la comparaison des diamètres à 45 degrés dans l'ellipse et dans l'hyperbole limites.

48. La plupart du temps, on reconnaîtra d'avance l'inutilité de la seconde série d'essais, d'autant plus que, dans la comparaison dont nous venons de parler, ce n'est pas le diamètre même de l'hyperbole qui doit figurer, mais son produit par $\sqrt{2}$. En effet, pour les systèmes de projection appartenant à la première série, l'altération de l'unité de longueur est partout positive, tandis que pour chacun des systèmes de la seconde elle est tantôt positive et tantôt négative, ce qui double ses variations. Il y aurait lieu de faire une remarque analogue sur les modes de projection qui, autour d'un même point, augmentent ou diminuent les distances, suivant la direction ; tel est celui de la carte du Dépôt de la Guerre. Pour éviter ces distinctions et rendre les systèmes de la première série immédiatement comparables aux autres, nous supposerons qu'avant d'appliquer les formules (3)

on retranche, de chacun des coefficients, une fraction de sa valeur marquée par la moitié de la plus grande altération de l'unité de longueur, ce qui revient à un changement d'échelle et ne saurait modifier les angles sur la carte. Alors les distances seront conservées en tous les points de l'ellipse dont le rapport d'homothétie avec l'ellipse limite est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Négative à l'intérieur de la première courbe et positive à l'extérieur, l'altération de longueur augmentera, en valeur absolue, pour des points de plus en plus éloignés de son contour; au centre et sur l'ellipse limite, cette valeur absolue atteindra son *maximum*, qui ne sera plus que la moitié de ce qu'il était auparavant.

49. Les expressions du troisième ordre que nous avons ajoutées à $s + \frac{\sin l_0}{2r_0} t^2$ et à $\frac{r}{r_0} t$, pour compléter x et y, dans les formules (1), ne comportent pas toute la généralité possible, car la grandeur relative d'un terme ne dépend pas seulement de son degré, mais aussi de son coefficient. Aux termes du troisième degré, nous devons en joindre d'autres du second et d'autres du premier, en les supposant affectés de coefficients comparables, pour ceux-là, aux valeurs que peuvent prendre s et t dans l'intérieur ou sur le contour de la contrée, et, pour ceux-ci, aux carrés des mêmes valeurs. Ces coefficients se grouperont entre eux, et non avec ceux des termes du troisième degré, dans les développements de h, de k et de $\sin\theta$, et l'on établira facilement les relations auxquelles ils doivent satisfaire pour que les altérations d'angles restent comparables aux grandeurs du troisième ordre, et les altérations de distances à celles du second. On trouve que les valeurs (3) de x et de y doivent être com-

plétées par les expressions suivantes :

$$\xi = \quad A_1 s^2 + 2B_1 st - A_1 t^2 + A_2 s,$$
$$\eta = -B_1 s^2 + 2A_1 st + B_1 t^2 + A_2 t,$$

dans lesquelles A_1, B_1 et A_2 désignent des coefficients arbitraires, mais de grandeurs comparables, les deux premiers aux valeurs que s et t sont susceptibles de prendre, le troisième aux carrés de ces mêmes valeurs. Quant à l'altération de l'unité de longueur, elle devient

$$\varepsilon = As^2 - 2Bst + \left(\frac{1}{2} - A\right) t^2 + 2A_1 s + 2B_1 t + A_2.$$

En général, on pourra faire disparaître les termes du premier degré qui figurent dans ε, en remplaçant les variables s et t par d'autres ayant avec elles des différences constantes. On pourrait ensuite faire abstraction du terme constant, ce qui reviendrait à changer d'échelle dans la construction de la carte. On retomberait alors sur l'expression (4). Les seuls modes de projection que nous ayons à examiner sont ceux qui ne se prêteraient pas à ces transformations, c'est-à-dire ceux pour lesquels on aurait

$$B^2 = A\left(\frac{1}{2} - A\right).$$

Le changement de coordonnées dont on fait usage dans la réduction de l'équation de la parabole à sa forme la plus simple pourra être employé ici. Alors, u et v étant les nouvelles variables, et C_1 désignant un coefficient constant, on trouvera

$$\varepsilon = \frac{1}{2} v^2 - C_1 u.$$

Les points où la représentation produit la même altération de longueur se répartissent cette fois, sur la carte

auxiliaire, suivant des paraboles égales ayant leurs axes sur une même droite. Les valeurs u et v étant considérées comme deux coordonnées rectangulaires, l'altération est nulle sur la parabole qui a son sommet à l'origine. Sur deux paraboles ayant leurs sommets équidistants de ce point, l'altération prend des valeurs égales et de signes contraires mesurées par la moitié du carré de la demi-corde que l'une d'elles intercepte sur la tangente au sommet de la parabole qui passe par l'origine. On voit comment, à l'aide de la carte auxiliaire de la contrée, et de groupes de paraboles tracées sur papier transparent, on pourra déterminer le plus avantageux des modes de projection pour lesquels B^2 est égal à $A\left(\frac{1}{2}-A\right)$. Il sera facile ensuite de le comparer à celui qui aura été obtenu par les tracés d'ellipse. En général, ce dernier sera le plus avantageux, et c'est ce que l'on reconnaîtra souvent sans avoir recours aux essais qui viennent d'être indiqués.

Cas particuliers.

50. Si le contour du pays présente une certaine symétrie par rapport à un méridien ou par rapport à un parallèle, l'angle E sera assez voisin de zéro ou de 90 degrés. On lui donnera alors une de ces deux valeurs, afin de simplifier les formules, lesquelles deviendront

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} x &= s + \frac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \frac{A}{3}s^3 + Cst^2, \\ y &= \frac{r}{r_0}t + As^2t + \frac{C}{3}t^3, \\ \varepsilon &= As^2 + \left(\frac{1}{2} - A\right)t^2. \end{aligned}\right.$$

Dans les essais qui auront pour but de déterminer la

valeur de A, on aura soin de maintenir le grand axe des ellipses perpendiculaire ou parallèle aux méridiens de la carte auxiliaire.

51. En prenant de plus A égal à zéro, on aurait

$$(10)\quad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \dfrac{\cos 2l_0}{2\cos^2 l_0}st^2, \\ y = \dfrac{r}{r_0}t + \dfrac{\cos 2l_0}{6\cos^2 l_0}t^3, \\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

Telles sont les formules qu'il conviendrait d'adopter si, dans le système qui correspond au *minimum* de la plus grande valeur de ε, le coefficient A était assez petit. Dans le cas où le parallèle de latitude moyenne serait voisin de celui de 45 degrés, elles se réduiraient à

$$x = s + \frac{1}{2}r_0 \sin l_0 m^2, \quad y = rm, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}m^2.$$

52. L'angle E étant toujours supposé nul ou droit, si les essais conduisent à une valeur de A peu différente de $\frac{1}{2}$, on prendra A exactement égal à $\frac{1}{2}$, et, par conséquent, C à $-\frac{1}{2}\tang^2 l_0$. Il viendra

$$(11)\quad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \dfrac{1}{6}s^3 - \dfrac{1}{2}\tang^2 l_0 st^2, \\ y = \dfrac{r}{r_0}t + \dfrac{1}{2}s^2t - \dfrac{1}{6}\tang^2 l_0 t^3, \\ \varepsilon = \dfrac{1}{2}s^2. \end{cases}$$

53. On adoptera aussi soit le système (10), soit le système (11), quand les points de contact des ellipses li-

mites avec le contour du pays se trouveront dans le voisinage du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes, car alors en chacun de ces points la valeur de s sera sensiblement la même que celle de t, et celle de ε, que l'on peut écrire

$$\varepsilon = \frac{1}{2}t^2 + A(s^2 - t^2),$$

deviendra à peu près indépendante de A.

54. On peut d'ailleurs présenter le système (11) sous une forme beaucoup plus simple, et lui donner une définition géométrique. Le développement de r borné à trois termes est

$$r = r_0 - \sin l_0 s - \frac{\cos l_0}{\rho_0} s^2;$$

si on le substitue à r dans y, si l'on néglige l'aplatissement dans les termes du troisième ordre et que l'on continue à supprimer ceux du quatrième, enfin si l'on pose

$$(12) \qquad R_0 = r_0 \operatorname{cos\acute{e}c} l_0, \quad R = R_0 - s - \frac{1}{6}s^3, \quad \mu = m \sin l_0,$$

les formules (10) deviendront identiques aux suivantes:

$$(13) \qquad x = R_0 - R\cos\mu, \quad y = R\sin\mu.$$

Celles-ci donnent pour l'équation d'un méridien quelconque

$$y = (R_0 - x)\operatorname{tang}\mu,$$

et, pour celle d'un parallèle,

$$y^2 + (R_0 - x)^2 = R^2.$$

Ainsi les méridiens de la carte sont des droites concourantes, et les parallèles, des circonférences concentriques. Les méridiens et le parallèle moyen sont tels

qu'on les obtiendrait dans le développement du cône circonscrit, le long de ce parallèle, à la surface terrestre. La distance comprise entre le parallèle moyen et tout autre de la carte est égale à l'arc de méridien que ces deux parallèles interceptent sur le globe augmenté de la sixième partie de son cube. Comme rien ne distingue les méridiens les uns des autres dans ce mode de projection, il conserve ses propriétés quelle que soit, dans le sens des longitudes, l'étendue du pays que l'on veut représenter. On adoptera un parallèle moyen dont la latitude diffère peu de la moyenne arithmétique entre les deux latitudes extrêmes.

55. Pour calculer l'arc s, qui figure dans les formules relatives à nos divers modes de projection, on se servira de son développement suivant les puissances de λ; en négligeant l'aplatissement dans les termes d'ordre supérieur au deuxième, on a

$$s = \rho_0 \lambda^2 + \frac{3\rho_0(N_0 - \rho_0)}{2N_0} \operatorname{tang} l_0 \lambda^2.$$

56. Considérons maintenant les méridiens terrestres comme des ellipses et soit e l'excentricité. Il viendra

$$N = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on conclut, en négligeant e^4 dans les termes du deuxième ordre,

$$s = \rho_0 \lambda + \frac{3}{4} e^2 \sin 2 l_0 \lambda^2.$$

En particulier, si nous nous reportons au système de projection défini par les formules (12) et (13), nous trouverons, en introduisant cette expression de s dans celle

du rayon des parallèles de la carte,

$$(14) \qquad R = R_0 - \rho_0 \left(\lambda + \frac{3}{4} e^2 \sin 2 l_0 \lambda^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 \right).$$

Au second membre de cette égalité, le facteur ρ_0 doit être maintenu devant λ, mais, devant les autres termes, il ne sert qu'à mettre en évidence l'homogénéité.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LA QUESTION « TOUT NOMBRE PAIR EST-IL LA SOMME DE DEUX IMPAIRS PREMIERS? »

PAR M. LIONNET.

Cette question, posée d'abord par Goldbach dans sa correspondance avec Euler, n'a pas encore été résolue. Mais en général les géomètres qui s'en sont occupés, et particulièrement Euler, regardent l'affirmative comme très-probable. Nous allons démontrer quelques propositions qui nous semblent plutôt établir la probabilité contraire.

I. THÉORÈME. — *Si l'on désigne respectivement par les lettres q, x, y, z le plus grand nombre entier contenu dans le quart d'un nombre pair $2a$; le nombre des manières dont $2a$ est la somme de deux impairs premiers; le nombre des manières dont $2a$ est la somme de deux impairs composés et inégaux; et le nombre des impairs premiers inférieurs à $2a$, on aura la relation*

$$(1) \qquad q + x = y + z.$$

Pour la démontrer, nous distinguerons trois cas, suivant que $2a$ est multiple de 4, double d'un impair composé, ou double d'un impair premier; c'est-à-dire les trois

cas généraux comprenant les trois cas particuliers, faciles à vérifier,

$$2a = 24 = 4 \times 6;\quad 2a = 30 = 15 \times 2;\quad 2a = 34 = 17 \times 2.$$

Premier cas : $2a = 4q$.

$$(2)\quad \begin{cases} (4q-1).(4q-3)\ \ldots\ (2q+3).(2q+1) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad\ \ldots\ (2q-3).(2q-1). \end{cases}$$

Les $2q$ nombres impairs inférieurs à $2a$ sont en progression arithmétique dont le premier terme est l'unité, la raison égale à 2, et le dernier terme égal à $4q - 1$. Quant aux sommes de deux termes également distants des extrêmes, elles sont toutes égales à $2a$, et leur nombre est égal à q. De plus, chacune de ces sommes étant formée de deux impairs premiers, ou de deux impairs composés et inégaux, ou de deux impairs l'un premier et l'autre composé, si l'on désigne par z' le nombre de ces dernières sommes, on aura évidemment

$$(3)\qquad q = x + y + z',$$

et, par suite,

$$(4)\qquad q + x = y + 2x + z';$$

remplaçant $2x + z'$ par z qui lui est égal, on obtient la relation (1).

Deuxième cas : $2a = 4q + 2$; $2q + 1$ étant composé.

$$(5)\quad \begin{cases} (4q+1).(4q-1)\ \ldots\ (2q+3).(2q+1) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad\ \ldots\ (2q-1).(2q+1). \end{cases}$$

Abstraction faite des deux impairs composés égaux à $2q + 1$, on voit que le nombre des sommes de deux impairs, dont chacune égale $2a$, est encore égale à q, et l'on est conduit successivement, par un raisonnement

semblable au précédent (*premier cas*), aux relations (3), (4), (1).

Troisième cas : $2a = 4q + 2$; $2q + 1$ étant premier.

$$(6)\quad \begin{cases} (4q+1).(4q-1) \ldots (2q+3).(2q+1) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad \ldots (2q-1).(2q+1). \end{cases}$$

Ici, le nombre des sommes de deux impairs, toutes égales à $2a$, est $q+1$, au lieu d'être égal à q comme dans chacun des cas précédents, parce qu'il faut y comprendre la somme des deux nombres premiers égaux à $2q+1$. On aura donc

$$(7)\qquad q + 1 = x + y + z',$$

et, par suite,

$$(8)\qquad q + x = y + (2x - 1) + z';$$

mais, le nombre premier $2q + 1$ étant compté deux fois dans $2x$, on a

$$(9)\qquad (2x - 1) + z' = z,$$

ce qui ramène (8) à l'égalité (1), laquelle se trouve ainsi démontrée pour toutes les valeurs de $2a$, y compris son minimum égal à 2.

Corollaire. — On déduit de la relation (1)

$$(10)\qquad x = y + z - q;$$

donc, pour que $x = 0$, il faut et il suffit que $y + z = q$; ou, en d'autres termes, pour qu'un nombre pair $2a$ ne soit pas égal à la somme de deux impairs premiers, il faut et il suffit que la somme $y + z = q$. Ainsi, ce théorème (*non démontré*) : *Tout nombre pair $2a$ est la somme de deux impairs premiers,* revient à celui-ci : *Pour tout nombre pair $2a$, la relation $y + z = q$ est impossible.*

II. Théorème. — *Le nombre n étant aussi grand qu'on voudra, il existe : 1° n entiers consécutifs composés ; 2° n impairs consécutifs composés.*

1° Soit

$$(11) \qquad 2i = 2.3.5.7.11 \ldots p,$$

p étant le plus grand des nombres premiers non supérieurs à $n+1$; chacun des n entiers consécutifs

$$(2i+2),\ (2i+3),\ (2i+4),\ \ldots,\ (2i+n+1)$$

est un nombre composé. Car soit $2i+h$ l'un quelconque de ces n entiers : h, étant compris entre 1 et $n+2$, admet comme diviseur l'un au moins des facteurs premiers de $2i$, (11) ; donc $2i+h$, somme de deux multiples d'un facteur premier de $2i$, est un nombre composé.

2° Soit

$$(12) \qquad 2i = 2.3.5.7.11 \ldots p,$$

p étant le plus grand des nombres premiers non supérieurs à $2n+1$; chacun des n impairs consécutifs

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2i+3),\ (2i+5),\ (2i+7),\ (2i+9),\ \ldots, \\ \qquad\qquad (2i+2n+1) \end{array} \right.$$

est un nombre composé. On le prouve comme précédemment (1°), en observant que, si $2i+h$ désigne l'un quelconque de ces n impairs, h est un impair compris entre 2 et $2n+2$.

Corollaire. — En consultant une Table de nombres premiers, on reconnaît immédiatement que, pour de très-grandes valeurs d'un nombre pair $2a$, le rapport du nombre z des impairs premiers inférieurs à $2a$ à celui des impairs composés est très-petit. De plus, puisque dans la suite des nombres impairs il existe un nombre

indéfini de groupes (2°) d'impairs consécutifs composés en nombre n aussi grand qu'on voudra, on est en droit d'en conclure que le rapport de z au nombre des impairs composés inférieurs à $2a$ est infiniment petit quand $2a$ est infiniment grand.

III. Conclusion. — Considérons la progression

$$\begin{matrix}(2i+2n+1).(2i+2n-1)\ldots(2i+3)\ldots(i+n+2)\\ 1 \quad . \quad 3 \quad \ldots(2n-1)\ldots(i+n),\end{matrix}$$

où nous supposerons n pair et $2i = 2.3.5\ldots p$, (12). Cette progression sera dans le cas de la progression (2), où la somme des extrêmes $= 2a = 4q$. De plus, ses n derniers termes étant tous comme les n termes de la progression (13) des impairs composés, aucune des n premières sommes de deux termes également distants des extrêmes n'est formée de deux nombres premiers. Quant aux autres termes dont le plus petit est $2n+1$, comme ce nombre n peut être supposé aussi grand qu'on voudra, le rapport du nombre des impairs premiers à celui des impairs composés sera infiniment petit (II, Cor.), de sorte que, par exemple, sur chaque million de milliards de ces termes il pourra ne se trouver qu'un seul impair premier. Il est donc permis d'en conclure que, parmi le nombre infini de valeurs très-considérables dont n est susceptible, il en est très-probablement au moins une pour laquelle aucune des q sommes de deux impairs, toutes égales à $2a$, ne sera formée de deux impairs premiers, ou, en d'autres termes, au moins une valeur de n pour laquelle l'égalité $y+z=q$ sera vérifiée.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1878)

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 36);

SOLUTION DE M. PAUL TERRIER.

On donne deux points P *et* P′ *sur la circonférence* S *circonscrite à un triangle* ABC. *On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des points* P *et* P′ *sur les trois côtés du triangle sont respectivement sur deux droites.*

1° *Démontrer que le point de rencontre* M *de ces droites décrit une circonférence* S′ *quand le sommet* C *du triangle se meut sur la circonférence* S, *les points* A, B, P, P′ *restant fixes.*

2° *Trouver le lieu des centres des circonférences* S′, *les points* A *et* B *restant fixes et les points* P *et* P′ *se déplaçant sur la circonférence* S, *de telle sorte que l'arc* PP′ *conserve une longueur constante.*

1° Les droites QR et Q′R′, qui joignent les pieds des perpendiculaires respectivement abaissées des points P et P′ sur AB et sur AC, se coupent sous un angle M égal à la somme (ou à la différence) des angles PRQ, P′R′Q′ (*), sous lesquels les côtés QM et Q′M sont respectivement coupés par les parallèles PR et P′R′. Mais on voit, par les quadrilatères inscriptibles PRAQ, P′R′AQ′, que les

(*) Quand les points P et P′ sont situés d'un même côté de AC, l'angle M ou QMQ′ est égal à la différence des angles PRQ, P′R′Q′, et, lorsque les points P, P′ sont de différents côtés de AC, l'angle QMQ′ est le supplément de la somme des angles PRQ, P′R′Q′. Dans les deux cas, QMQ′ = PAP′. (*Note du Rédacteur.*)

angles PRQ, P′R′Q′ sont respectivement égaux aux angles PAB, P′AB, dont la somme (ou la différence) constante PAP′ est dès lors égale à l'angle M. Le lieu des points M est donc une circonférence S′ qui passe par les points Q et Q′ et dont le rayon est au rayon de S dans le rapport des segments de droites QQ′, PP′.

Il est à remarquer que les pieds A′ et B′ des perpendiculaires abaissées des points A et B sur PP′ sont les positions particulières du point M qui correspondent respectivement à la position AA′ de AC et à la position BB′ de BC. On pourra donc déterminer très-simplement un troisième point A′ ou B′ de la circonférence S′, dont on connaît déjà les points Q et Q′.

2° Il résulte immédiatement de notre dernière remarque que les perpendiculaires abaissées du centre S sur AB, et du centre S′ sur A′B′ se coupent au point O, milieu de AB. Pareillement, les perpendiculaires abaissées du centre S sur PP′, et du centre S′ sur QQ′ se coupent au point T, milieu de PP′. On a d'ailleurs, dans le parallélogramme SOS′T, OS′ = ST. Le lieu des centres S′ est donc une circonférence décrite du point O, milieu de AB, comme centre, avec un rayon égal à celui de la circonférence tangente à toutes les cordes PP′.

Quant à la loi de variation de la circonférence S′, on la déduit de ce que le rapport de son rayon à celui de S est égal au rapport du segment QQ′ au segment PP′. On voit immédiatement que le rayon de S′ a deux valeurs symétriques maxima égales au rayon de S lorsque PP′ est parallèle à AB, et deux valeurs nulles lorsque PP′ est perpendiculaire sur AB.

La question posée est du reste un cas particulier de la question 1263 (première partie), précédemment insérée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XVII, p. 239). Il est aisé de vérifier, en effet, que l'angle M ne

cesse pas d'être constant et égal à l'angle inscrit sous-tendu par l'arc PP′ de S, lorsqu'on remplace les perpendiculaires abaissées des points P et P′ sur les côtés du triangle ABC par des obliques faisant avec les mêmes côtés des angles α, égaux et de même orientation, mais d'ailleurs quelconques. Les points A′ et B′, communs à la circonférence S′ et à la droite PP′, sont, dans ce cas, les pieds des obliques menées des points A et B à la droite PP′, sous l'angle α, et dans le sens convenu. Le lieu des centres S′ est la circonférence qui a pour diamètre le segment de AB limité par les deux cordes PP′ qui coupent AB sous l'angle α.

La deuxième partie de la question 1263 est relative au lieu décrit par le point M quand on fait varier l'angle α.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Gambey; Bertrand Armand; F. Faugé, chargé de cours au Lycée de Toulouse; Robaglia; Arthur Leinchugel, étudiant en Mathématiques.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

1re session. — 2 et 3 aout 1878.

(voir 2e série, t. XVIII, p. 91).

Solution de M. ROBAGLIA,

A Philippeville.

On donne dans un plan une droite LL′, *un point* F *et un point* A; *on considère toutes les coniques pour lesquelles le point* F *est un foyer et la droite* LL′ *la directrice correspondante. Par le point* A *on mène des tangentes à toutes ces coniques, et l'on demande :*

1° *Le lieu de la projection de* A *sur toutes les cordes de contact;*

2° *Le lieu des points de contact. Ce dernier lieu est une conique : reconnaître quel est son genre d'après la position du point* A, *et, pour une position donnée de ce point, chercher à obtenir, par des constructions simples, un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer la conique.*

1° On sait que la polaire du point A par rapport à l'une quelconque des coniques considérées coupe la directrice LL' au même point B que la perpendiculaire FB à la droite FA. Donc, le lieu de la projection du point A sur toutes les polaires est la circonférence décrite sur AB, comme diamètre.

2° Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le pied O de la perpendiculaire FO à la directrice LL', et pour axe des x cette perpendiculaire, dans le sens où l'abscisse du point F est positive.

Soient a cette abscisse, et α, β les coordonnées du point A. L'équation générale des coniques considérées est

$$(x-a)^2+y^2-kx^2=0$$

ou

$$(1-k)x^2+y^2-2ax+a^2=0,$$

et celle des polaires du point A par rapport à ces coniques :

$$\beta y+[(1-k)\alpha-a]x+a(a-\alpha)=0.$$

On aura l'équation du lieu des points d'intersection de ces coniques et des polaires correspondantes en éliminant le paramètre variable k entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$(1)\qquad ax^2-\beta xy+\alpha y^2-a(a+\alpha)x+\alpha a^2=0;$$

le lieu est, par conséquent, une conique.

Le binôme caractéristique $\beta^2-4a\alpha$ de l'équation (1)

montre que la conique représentée par cette équation est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point donné A est intérieur ou extérieur à la parabole $y^2 = 4ax$, ou situé sur cette parabole dont le foyer est F.

La conique représentée par l'équation (1) passe aux points A, F, où elle est tangente aux droites BA, BF, car les coefficients angulaires

$$\frac{a(a-\alpha)+\beta^2}{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \frac{a-\alpha}{\beta}$$

de ses tangentes en ces points sont aussi ceux des droites BA, BF; en outre, elle coupe l'axe des x en un autre point dont l'abscisse est α. Connaissant ainsi un point, deux tangentes et leurs points de contact, il est facile de construire la courbe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; A. Leinchugel; G. Lambiotte, élève à l'École Polytechnique de Bruxelles H. Rigolot.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

2e SESSION. — 17 ET 18 OCTOBRE 1878.

(voir 2e série, t. XVIII, p. 93);

SOLUTION DE M. ARTHUR LEINCHUGEL,
Étudiant en Mathématiques.

1° *On donne dans un plan une droite* P *et un point* F, *pris en dehors et à une distance* a *de cette droite : écrire l'équation générale des hyperboles qui ont le point* F *pour un de leurs foyers, et la droite* P *pour une de leurs asymptotes.*

2° *Du centre de chacune de ces hyperboles on mène*

à la droite P *une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à son intersection* M *avec la directrice correspondant au foyer* F : *trouver l'équation de la courbe lieu des points* M, *et indiquer la position de cette courbe.*

3° *Former l'équation du lieu des projections du foyer* F *sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées.*

Prenons pour axe des x la droite donnée et pour axe des y la perpendiculaire FO, abaissée du foyer F sur cette droite.

1° La directrice correspondant au foyer F passant par l'origine O, l'équation générale des coniques ayant un de leurs foyers au point F est

$$x^2 + (y - a)^2 = (\lambda x + \mu y)^2.$$

L'axe des x étant l'une des asymptotes des hyperboles considérées, $\lambda = +1$, et l'équation générale de ces coniques est

$$x^2 + (y - a)^2 = (x + \mu y)^2. \tag{1}$$

2° Les coordonnées du centre C de l'hyperbole représentée par l'équation (1) sont $y = 0$, $x = -\frac{a}{\mu}$, et l'équation de la perpendiculaire CM à la droite P est

$$\mu x + a = 0. \tag{2}$$

L'équation de la directrice OM correspondant au foyer F est

$$\mu y + x = 0. \tag{3}$$

Multiplions respectivement les équations (2) et (3) par y et x, et retranchons membre à membre les équations résultantes; il vient

$$x^2 - ay = 0.$$

Le lieu des points M est donc une parabole de paramètre $\frac{a}{2}$, ayant OF pour axe et Ox pour tangente au sommet.

On peut trouver facilement ce lieu par la Géométrie.

En effet, abaissons sur OF la perpendiculaire MP, et soit D le point d'intersection de FC avec OM. Les triangles semblables OMP, OFD donnent

$$OD.OM = OF.OP.$$

Or,

$$OC^2 = OD.OM;$$

donc

$$OC^2 = OF.OP = OF \times MC, \quad \text{ou} \quad x^2 = ay.$$

3° La figure étant symétrique par rapport à CF, *le lieu des projections du foyer* F *sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées* est évidemment la circonférence décrite de F comme centre, avec a pour rayon. L'équation de ce lieu est

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

En traitant cette dernière question au moyen de l'équation générale (1), on arrive à une équation du quatrième degré dans laquelle on peut mettre en facteur le premier membre de l'équation (4). Cette équation du quatrième degré montre que le point F est un point isolé.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Robaglia; G. Lambiotte, élève à l'École polytechnique de Bruxelles; G. Kœnigs, de Toulouse; H. Rigolot.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1878)

DEUXIÈME QUESTION

(voir p. 90);

SOLUTION DE M. ARTHUR LEINCHUGEL,
Étudiant en Mathématiques.

On donne les trois côtés a, b, c d'un triangle, et l'on suppose $a > b > c$. Déterminer la quantité x qu'il faut retrancher de chaque côté pour que le triangle qui aurait pour côtés $a - x$, $b - x$, $c - x$ soit rectangle. (Discussion sommaire.)

On doit avoir, d'après l'énoncé,

$$(a-x)^2 = (b-x)^2 + (c-x)^2$$

ou

$$(1) \qquad x^2 - 2(b+c-a)x + b^2 + c^2 - a^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont réelles, car on a

$$(b+c-a)^2 - (b^2+c^2-a^2) = 2(a-b)(a-c) > 0;$$

leur somme $2(b+c-a)$ est positive, puisque le côté a du triangle donné est moindre que la somme des deux autres côtés.

Le produit $b^2 + c^2 - a^2$ de ces racines peut s'écrire

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A;$$

donc, quand $A > 90^\circ$, on a $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, et les racines sont de signe contraire.

Pour $A < 90^\circ$, on a $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, et les deux racines sont positives.

Si $A = 90^\circ$, $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, et l'équation (1) se réduit à

$$x[x - 2(b + c - a)]; \text{ d'où } x = 0 \text{ et } x = 2(b + c - a).$$

La racine $2(b + c - a)$, étant plus grande que c, ne peut convenir.

On voit facilement que, dans les hypothèses $A \gtrless 90^\circ$, la racine correspondant au signe $+$, pris devant le radical, est plus grande que c, et, par suite, doit être rejetée (*).

BIBLIOGRAPHIE.

1. Théorie des quantités négatives; par M. *de Campou*, Professeur au collége Rollin. In-8. — Paris, Gauthier-Villars, 1879. Prix : 1 fr. 50.

L'auteur s'est proposé de donner une théorie de ces quantités. Il considère les polynômes et distingue les termes *arithmétiques* et les termes *algébriques*.

La définition de ces éléments étant donnée, il définit l'addition et la soustraction des monômes algébriques.

Semblablement pour la multiplication, la théorie de la multiplication des polynômes arithmétiques une fois connue, il définit le produit de deux termes algébriques, et arrive ainsi à la règle connue de la multiplication de deux polynômes.

(*) En remplaçant x par 0 et par c, le premier membre de l'équation (1) devient successivement

$$b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{et} \quad -(a - b)(a + b - 2c) < 0.$$

Donc, lorsqu'on a $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, la racine positive de l'équation surpasse c. Et si $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, l'une des deux racines positives de l'équation (1) est plus petite que c et l'autre plus grande. Donc la question proposée est impossible, dans l'hypothèse $b^2 + c^2 - a^2 < 0$; elle admet une solution, et une seule, lorsque $b^2 + c^2 - a^2 > 0$.

(*Note du Rédacteur.*)

Quant à la divisibilité, après avoir donné le caractère de divisibilité par $x - A$, A étant une quantité arithmétique, il procède à la recherche du reste par $x - a$, a étant algébrique.

Après avoir interprété les solutions négatives dans les équations, l'auteur modifie l'énoncé du problème relatif aux âges d'un père et de son fils, qui conduit à une solution négative, et il donne un énoncé nouveau.

Vient ensuite l'introduction des quantités négatives dans les énoncés; puis l'auteur traite complétement, en s'inspirant de la marche de M. Duhamel, le problème des courriers.

L'auteur montre ensuite comment il convient de définir les grandeurs qui fournissent les éléments analytiques de la Trigonométrie, de la Géométrie analytique et de la Mécanique.

2. Principes de la Mécanique moléculaire relatifs a l'élasticité et a la chaleur des corps; par *Étienne Gény*. In-8. — Nice, Visconti; 1876.

3. Traité de Mécanique rationnelle, a l'usage des candidats a la licence et a l'agrégation; par *H. Laurent*. 2e édition, 2 vol. in-8. — Paris, Gauthier-Villars, 1878. Prix : 12 francs.

4. Cours d'Algèbre supérieure; par *J.-A. Serret*, 4e édition, 2 vol. in-8. — Paris, Gauthier-Villars, 1879. Prix : 25 francs.

5. Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres a développer cette puissance; par *Sadi Carnot*. 2e édition, in-8, avec un portrait de l'auteur. — Paris, Gauthier-Villars, 1878. Prix : 6 francs.

6. Theorie der algebraischen Gleichungen; von Dr *Jul. Petersen*. In-8. — Copenhague, Andr. Fred. Höst et fils, 1878.

7. Traité élémentaire de Géométrie descriptive,

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, CONTENANT UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES GRADUÉS A RÉSOUDRE; par *Ernest Lebon*. 1[re] Partie : *Plan, polyèdres et sphères*, texte et planches. 2[e] Partie : *Surfaces courbes géométriques*, texte et planches. 3[e] et 4[e] Parties : *Surface topographique et perspective*, texte et planches. In-8. — Paris, Delalain, 1877. Prix : 10 francs.

8. RECUEIL DE PROBLÈMES GRADUÉS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, A L'USAGE DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES ET AUX ÉCOLES DE SAINT-CYR, NAVALE ET FORESTIÈRE; par *Ernest Lebon*. In-8. — Paris, Delalain, 1878. Prix : 0[fr], 75.

9. RECUEIL DES ÉPURES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE PROPOSÉES DEPUIS 1862 POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR; par *Ernest Lebon*. In-8. — Paris, Delalain, 1878.

10. LETTERA INEDITA DI GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE, tratta della Biblioteca Universitaria di Bologna e pubblicata da *B. Boncompagni*. Firenze, calcografia e litografia Achille Paris (1879).

Le prince Balthasar Boncompagni vient de publier à Florence une fort belle reproduction du fac-simile d'une nouvelle Lettre inédite de J.-L. Lagrange, qu'il a trouvée dans la Correspondance de Canterzani, à la Bibliothèque universitaire de Bologne. Elle est datée de Berlin, 6 avril 1773, et adressée à Canterzani, secrétaire de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.

Cette Lettre, que Lagrange écrivit à Canterzani pour le charger de remercier l'Académie de Bologne de l'*avoir adopté* sans qu'il eût sollicité cette faveur, est pleine de modestie et de sentiments délicats délicatement exprimés; elle dépeint bien l'homme de génie qui, par la douceur et la droiture de son caractère et la simplicité de ses mœurs, sut se faire chérir de ses contemporains et de ses rivaux eux-mêmes.

ARISTIDE MARRE.

11. Nouveaux Éléments de Géométrie, par M. *Charles Méray*, ancien élève de l'École Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — Paris, F. Savy, 1874; in-8.

Bien des professeurs se sont souvent demandé pourquoi la Géométrie plane et celle de l'espace ne sont pas enseignées collatéralement dans les établissements d'Instruction publique. Ces deux parties, qui constituent la science élémentaire de l'étendue, se correspondent cependant, et sont presque telles qu'à chaque proposition de la première répond une ou plusieurs propositions de la seconde. Le plan, en effet, est engendré par la ligne droite, et la sphère l'est par le cercle. Plusieurs auteurs éminents se sont posé la même question, entre autres Crelle, le traducteur allemand des *Éléments* de Legendre, le fondateur du fameux *Journal* qui porte son nom; et Gergonne, le rédacteur des anciennes *Annales de Mathématiques*. Celui-ci, au Tome XVI, page 209, de son Recueil, s'exprime ainsi. « ... Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la Géométrie en *Géométrie plane* et *Géométrie de l'espace*, est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses, que vingt siècles d'habitudes ont pu nous le persuader. Toutefois, du moins, demeure-t-il vrai qu'en y renonçant on parviendrait, en ne recourant pour ainsi dire qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la Géométrie, des commençants que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lorsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de propriétés de l'étendue.... »

Les vœux émis par le savant rédacteur ont été réalisés par M. Charles Méray. Les *Nouveaux Éléments de Géométrie* qu'il a publiés mettent en regard, presque simultanément, les figures dans le plan et celles de l'espace.

Cette méthode a son avantage : elle détache des figures de l'espace, que nous offre la nature, celles qui existent sur leurs surfaces planes et leur donne ainsi la réalité de l'existence; elle détermine en outre avec précision les figures qui se correspondent dans le plan et dans l'espace, établit l'analogie entre leurs propriétés et diminue ainsi le travail de l'esprit.

Dans les *Nouveaux Éléments de Géométrie*, les propositions qui

concernent une figure ne sont pas noyées dans un dédale confus avec celles d'autres figures; elles se trouvent groupées ensemble et sont déduites chacune des précédentes, en passant du simple au composé.

Ces divisions soulagent l'esprit et font mieux ressortir les liens qui unissent entre eux les divers éléments qui constituent la figure.

Tels sont les principaux points qui distinguent l'Ouvrage de M. Méray des autres Éléments de Géométrie.

L'auteur a cherché en outre à ranger les matières dans l'ordre décroissant de leur utilité pratique, et à généraliser les propriétés de certaines surfaces simples, qui jouent un rôle prépondérant dans les Mathématiques appliquées.

Les axiomes y sont basés sur des faits généraux, empruntés à la nature, qui les expliquent et ajoutent à leur évidence.

Quelques définitions s'appuient sur l'idée de déplacement, de translation. Cette innovation n'est peut-être pas heureuse dans les premiers éléments de la science. Ainsi, en disant que *deux droites sont parallèles, quand une simple translation de l'une suffit pour la superposer à l'autre*, on ne satisfait pas autant l'esprit que par la définition ordinaire; pour être clair, il faudrait ajouter que la translation doit être parallèle, ce qui constitue une pétition de principe.

Il en est de même de quelques autres définitions ou démonstrations.

Les *Nouveaux Éléments de Géométrie* inaugurent une innovation dans l'exposition de cette science. Sera-t-elle admise par le public enseignant? Nous avons lieu d'en douter. Depuis plus de vingt siècles, la Géométrie a été considérée d'abord dans le plan, puis dans l'espace, chez les anciens comme dans les temps modernes; l'habitude en est prise; celle-ci a mis deux mille ans à s'enraciner: bien habile sera celui qui saura l'extirper.

Le travail de M. Méray a du mérite; il dénote chez l'auteur une réflexion suivie et une étude consciencieuse qui appellent une juste consécration.

GEORGES DOSTOR.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1263

(voir 2e série, t. XVII, p. 239);

PAR M. MORET-BLANC.

1° *Si par deux points* M, N, *pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés du triangle des angles* α *de même orientation, les deux transversales qui joignent respectivement les trois sommets d'angles issus de* M, *et les trois sommets d'angles issus de* N, *se coupent en un point* P *sous un angle constant.*

2° *Déterminer le lieu du point* P, *quand on fait varier l'angle* α. (P. TERRIER.)

1° Soient Ma, Mb, Mc les obliques menées du point M aux côtés BC, CA, AB sous l'angle α. Elles sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du point M sur ces côtés, et font avec celles-ci des angles égaux à $90° - \alpha$; il en résulte que les points a, b, c sont sur une droite faisant avec la droite de Simpson, relative au point M, l'angle $90° - \alpha$. En effet, si l'on portait les longueurs Ma, Mb, Mc sur les perpendiculaires, leurs extrémités seraient sur une parallèle à la droite de Simpson, laquelle prendra la position abc en la faisant tourner de $90° - \alpha$ autour du point M.

De même, Na', Nb', Nc' étant les droites analogues menées du point N, les points a', b', c' sont sur une droite faisant avec la droite de Simpson, relative au point N,

l'angle $90° - \alpha$, de même orientation que le premier. Il en résulte que les droites abc, $a'b'c'$ font entre elles un angle égal à celui des droites de Simpson, relatives aux points M et N, et par conséquent indépendant de α.

2° Soit RS une droite quelconque. Les droites abc, $a'b'c'$ tracent sur RS deux divisions homographiques dont les points doubles sont les points où le lieu du point P rencontre la droite RS : ce lieu est donc une *conique*.

On déterminera les points où elle rencontre les côtés du triangle en considérant les obliques qui aboutissent respectivement aux sommets.

Remarque. — Chaque série de droites, les droites abc, par exemple, enveloppe une conique tangente aux trois côtés du triangle.

En effet, chaque droite trace sur deux côtés du triangle deux divisions homographiques, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de α correspondent un point a et un point b ; les droites qui joignent les points correspondants de deux divisions homographiques tracées sur deux droites enveloppent, comme on sait, une conique.

Les côtés du triangle font d'ailleurs partie de la série des droites ; on les obtient en déterminant l'angle α, de manière que l'une des obliques aboutisse à un sommet.

Note. — Solutions analogues de MM. Ferdinando Pisani et Robaglia.

Question 1264

(voir 2e série, t. XVII, p. 240);

PAR M. VLADIMIR HABBÉ.

On donne une droite dont le coefficient d'inclinaison est $\tan g\,\alpha$ *(axes rectangulaires) : indiquer une construction graphique qui donne directement* $\tan g^3 \alpha$.

Application à la construction graphique d'une tangente à la cissoïde et à la strophoïde, parallèlement à une direction donnée. (H. BROCARD.)

Soit AB la droite donnée qui forme avec l'axe OX l'angle $OAB = \alpha$. Au point B, où elle coupe l'axe OY, menons à cette droite la perpendiculaire BC, qui rencontre en C le prolongement de OX. Menons encore à BC la perpendiculaire CD, dont l'intersection avec le prolongement de OY est D.

Dans le triangle rectangle DOA, on aura

$$\tang DAO = \tang^3 \alpha.$$

En effet, les triangles rectangles AOB, BOC, COD DOA donnent, respectivement,

$$OB = OA . \tang \alpha, \quad OC = OB \tang \alpha,$$
$$OD = OC . \tang \alpha, \quad \tang DAO = \frac{OD}{OA},$$

et, en multipliant membre à membre ces quatre égalités, il vient

$$\tang DAO = \tang^3 \alpha.$$

Note. — Nous avons reçu plusieurs autres solutions très-simples de la première partie de cette question; la seconde partie, relative aux tangentes, n'a pas été résolue.

Question 1278

(voir 2e série, t. XVII, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Trouver la somme des puissances semblables des racines de l'équation trinôme

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

lorsque l'exposant t est un multiple de n. (PELLET.)

Posant $x^n = y$, l'équation devient

(1) $$y^2 + py + q = 0,$$

et, en appelant y', y'' les racines de cette dernière, on aura

$$x'^n = y' \quad \text{et} \quad x''^n = y''.$$

Ces équations se ramènent à la forme

(2) $$z^n - 1 = 0,$$

en posant

$$x' = z\sqrt[n]{y'} \quad \text{et} \quad x'' = z\sqrt[n]{y''}.$$

Représentons les racines de l'équation (2) par z_1, z_2, z_3, ..., z_n ; nous aurons, pour les valeurs de x,

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = z_1\sqrt[n]{y'} \\ x'_2 = z_2\sqrt[n]{y'} \\ x'_3 = z_3\sqrt[n]{y'} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_n = z_n\sqrt[n]{y'} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x''_1 = z_1\sqrt[n]{y''} \\ x''_2 = z_2\sqrt[n]{y''} \\ x''_3 = z_3\sqrt[n]{y''} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x''_n = z_n\sqrt[n]{y''} ; \end{array}\right.$$

par suite, en désignant par S_t la somme des puissances semblables de ces racines, nous aurons

$$S_t = (z_1^t + z_2^t + z_3^t + \ldots + z_n^t)\left(y'^{\frac{t}{n}} + y''^{\frac{t}{n}}\right).$$

Or, on sait que la somme des puissances semblables des racines de l'équation binôme $z^n - 1 = 0$ est égale à n lorsque l'indice de la puissance est multiple de n ; donc

$$S_t = n\left(y'^{\frac{t}{n}} + y''^{\frac{t}{n}}\right).$$

On est ainsi ramené à une question connue : trouver la

somme des puissances semblables des racines de l'équation (1) du second degré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Louis Manipond, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

Question 1295

(voir 2e série, t. XVII, p. 526);

PAR M. P. SONDAT.

Démontrer :

1° *Que, si une solution de l'équation indéterminée*

$$u^3 + v^3 + x^3 + y^3 = 0$$

est donnée par l'égalité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

on obtient une nouvelle solution en faisant

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\beta + \gamma + \delta) - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,\\ v &= \beta(\alpha + \gamma + \delta) - \alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2,\\ x &= \gamma(\alpha + \beta + \delta) + \alpha^2 + \beta^2 - \delta^2,\\ y &= \delta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2; \end{aligned}$$

2° *Que, si l'on part de cette seconde solution pour en obtenir une troisième par le même procédé, on retombera, à un facteur commun près, sur les valeurs* α, β, γ, δ. (S. RÉALIS.)

1. En posant

$$(1)\qquad \begin{cases} A = \alpha + \beta + \gamma + \delta,\\ B = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2, \end{cases}$$

on a

$$(2)\qquad \begin{cases} u = \alpha A - B,\\ v = \beta A - B,\\ x = \gamma A + B,\\ y = \delta A + B, \end{cases}$$

et, en remplaçant dans l'équation proposée, on a

$$u^3+v^3+x^3+y^3=A^3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3),$$

c'est-à-dire que, en vertu de l'égalité admise, cette équation est satisfaite par les valeurs (2).

2. On aura une troisième solution, formée par les valeurs

$$(3)\qquad \begin{cases} u'=uA'-B', \\ v'=vA'-B', \\ x'=xA'+B', \\ y'=yA'+B', \end{cases}$$

en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} A'=u+v+x+y, \\ B'=u^2+v^2-x^2-y^2. \end{cases}$$

Mais, d'après (1) et (2),

$$A'=A^2,$$
$$B'=-A^2B,$$

d'où

$$u'=A^3\alpha,\quad v'=A^3\beta,\quad x'=A^3\gamma,\quad y'=A^3\delta,$$

et l'on retrouve, à un facteur commun près, les valeurs α, β, γ, δ.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; D. Charvet, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble; Louis Cauret.

Question 1301

(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. LEZ.

Dans un segment d'une conique quelconque, inscrire un trapèze maximum, la corde qui limite le segment étant une des bases du trapèze.

(F. GABRIEL-MARIE.)

1. Examinons d'abord le cas le plus simple, où la conique est une parabole. Prenons pour axe des x le diamètre passant par le milieu M de la corde donnée DE, et pour axe des y la tangente au point O de rencontre du diamètre et de la courbe; l'équation de la parabole sera

$$y^2 = 2px,$$

et, si m, n représentent les abscisses OM, ON des points où le diamètre OX rencontre les bases du trapèze inscrit, les ordonnées correspondantes MD, NC, c'est-à-dire les moitiés des bases du trapèze, auront, respectivement, pour valeurs $\sqrt{2qm}$, $\sqrt{2qn}$, et la surface sera exprimée par

$$S = \sin\theta.(m-n)(\sqrt{2qm} + \sqrt{2qn}).$$

Or, la dérivée de cette expression, prise par rapport à l'inconnue n, est

$$\sin\theta.\sqrt{2q}\left(\frac{m-3n}{2\sqrt{n}} - \sqrt{m}\right);$$

les valeurs de n, qui l'annulent, sont déterminées par l'équation

$$(m-3n)^2 = 4mn,$$

dont les racines sont

$$n' = m, \quad n'' = \frac{m}{9}.$$

Cette dernière répond à la question.

2. Dans le cas d'une conique à centre, d'une ellipse, par exemple, prenons encore pour axes coordonnés un système de diamètres conjugués OA, OB, le premier passant par le milieu M de la corde donnée.

En désignant par α, β les demi-diamètres conjugués OA, OB, et par m, n les abscisses OM, ON des milieux des bases du trapèze, les ordonnées correspondant à

ces abscisses, ou les demi-bases du trapèze, seront exprimées en longueur par

$$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-m^2},\quad \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-n^2}.$$

La surface sera

$$S=(n-m)\frac{\beta}{\alpha}\sin\theta\left(\sqrt{\alpha^2-m^2}+\sqrt{\alpha^2-n^2}\right),$$

dont la dérivée, par rapport à n, est

$$\frac{\beta}{\alpha}\sin\theta\left(\sqrt{\alpha^2-m^2}+\frac{\alpha^2+mn-2n^2}{\sqrt{\alpha^2-n^2}}\right).$$

En égalant à zéro cette dérivée, il vient

$$2n^2-mn-\alpha^2=\sqrt{(\alpha^2-m^2)(\alpha^2-n^2)};$$

d'où

$$(2n^2-mn-\alpha^2)^2=(\alpha^2-m^2)(\alpha^2-n^2),$$

et par suite

$$(1)\qquad 4n^4-4mn^3-3\alpha^2n^2+2\alpha^2mn+\alpha^2m^2=0.$$

L'équation (1) est vérifiée par $n=m$, et se réduit à

$$(2)\qquad 4n^3-3\alpha^2n-\alpha^2m=0,$$

en supprimant la racine égale à m.

Cette dernière équation est celle qui permet de trouver $\cos\frac{\varphi}{3}$ en fonction de $\cos\varphi$ (*).

(*) En divisant tous les termes de l'équation (2) par α^3, on a

$$4\left(\frac{n}{\alpha}\right)^3-3\left(\frac{n}{\alpha}\right)-\frac{m}{\alpha}=0,$$

et, parce que $\frac{m}{\alpha}$ est moindre que l'unité, on peut considérer $\frac{m}{\alpha}$ comme le cosinus d'un angle déterminé φ. En prenant pour inconnue $\frac{n}{\alpha}$, les racines de l'équation

$$4\left(\frac{n}{\alpha}\right)^3-3\left(\frac{n}{\alpha}\right)-\frac{m}{\alpha}=0$$

sont alors les valeurs de $\cos\frac{\varphi}{3}$. (*Note du Rédacteur.*)

Au reste, les racines de l'équation (2) sont les abscisses de points de rencontre de la parabole $x^2 = \frac{\alpha y}{2}$ et de la circonférence $y^2 + x^2 - 2\alpha y - mx = 0$. Ces deux courbes passent par l'origine des coordonnées : il est facile de les construire. De cette manière, nous déterminerons, géométriquement, l'abscisse du point N, milieu du plus petit côté du trapèze maximum, inscrit dans un segment donné elliptique. La même méthode conduira à un résultat semblable pour l'hyperbole.

Remarquons enfin que, si la corde donnée est un diamètre de l'ellipse, on aura $m = 0$, et les valeurs de n seront données par l'équation

$$n(4n^2 - 3\alpha^2) = 0, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2},$$

ce qui est le cosinus du tiers de $\frac{\pi}{2}$, dans un cercle de rayon α.

NOTE. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1319. Soient A, B, C, D et a, b, c, d, e, f les aires des faces et les longueurs des arêtes d'un tétraèdre donné ; V son volume ; M un point d'une surface du second ordre circonscrite à ce tétraèdre, et telle que le plan tangent à cette surface en chacun des sommets du tétraèdre soit parallèle à la face opposée ; α, β, γ les demi-axes de la surface ; v, v', v'', v''' les volumes des tétraèdres ayant respectivement pour bases les faces du tétraèdre donné et pour sommet le point M : on a les

relations

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 = V^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = \frac{9}{16}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \frac{243}{64}V^2.$$

(Genty.)

1320. Soit une série de cercles concentriques. Dans chacun d'eux on trace un rayon OM qui détache un secteur AOM d'aire donnée, à partir d'une droite fixe AOX passant par le centre O : trouver le lieu du point M.

(Laisant.)

1321. Étant donné un ellipsoïde, on décrit la sphère qui passe par les extrémités A, B, C de trois rayons conjugués et qui a son centre dans le plan ABC; trouver : 1° le lieu du centre de la sphère; 2° l'enveloppe de cette sphère. (Barbarin.)

1322. Démontrer que $\sqrt{5}$ est la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{8} - \frac{4}{21} + \frac{5}{55} - \frac{6}{144} + \ldots.$$

(Édouard Lucas.)

1323. Donner toutes les solutions du problème suivant :

Disposer également les neuf premiers nombres 1, 2, 3, ..., 9 sur les côtés d'un triangle équilatéral, comme

l'indique cette figure ⁛, de façon que les trois sommes des quatre nombres placés sur chaque côté soient égales entre elles, ainsi que les trois sommes de leurs carrés.

(F. PROTH.)

1324. Si (x, y, z) est une solution en nombres entiers de l'équation

$$aX^4 + bY^4 + dX^2Y^2 = cZ^2,$$

on aura toujours une solution en nombres entiers (x_1, y_1, z_1) de l'équation

$$X^4 + abc^2Y^4 + cdX^2Y^2 = Z^2$$

par les formules

$$x_1 = ax^4 - by^4, \quad y_1 = 2xyz, \quad z_1 = c^2z^4 + (4ab - d^2)x^4y^4.$$

Les formules de Lebesgue sont la conséquence évidente des précédentes. (A. DESBOVES.)

RECTIFICATIONS.

Page 298, ligne 7. — La phrase : « *inutile de rappeler...* » doit être enfermée dans la parenthèse qui commence à la ligne 6.

Page 299, ligne 13. — *Au lieu de* (4), *lisez* (3).

Page 300, ligne 5. — *Au lieu de* (5), *lisez* (4).

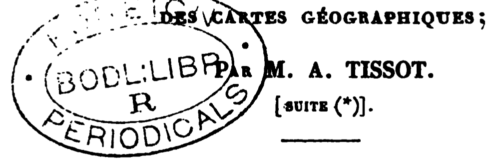
Page 305, les trois dernières lignes doivent être ainsi rectifiées :

« Donc le lieu se compose de l'intersection d'une surface du quatrième ordre avec trois ellipsoïdes réels et concentriques à l'ellipsoïde proposé. »

Page 335, question 1312. — *Au lieu de* $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, *lisez* $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$.

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;



PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].

Cartes de France et d'Espagne.

57. Sur la carte de France construite par le Dépôt de la Guerre, la plus grande altération d'angle est de 18 minutes; la plus grande altération de l'unité de longueur est $\frac{1}{380}$. Elles eussent été respectivement $10'30''$ et $\frac{1}{650}$, si, au lieu du parallèle de 45 degrés de latitude, comme parallèle moyen, on avait pris celui de $46°30'$. Enfin, elles se trouveraient réduites à 25 secondes et $\frac{1}{1100}$, si l'on faisait usage des formules (3) avec

$$A = 0,306, \quad C = -0,368, \quad l_{0} = 41°30',$$

le méridien moyen étant celui de Paris. Nous nous bornerons à ces quelques indications au sujet d'une carte qui n'est plus à faire. Nous nous étendrons, au contraire, sur l'application des recherches qui précèdent à la construction de la carte d'Espagne.

58. La carte auxiliaire de ce pays a été construite à l'échelle de 1 millimètre pour 2 minutes d'arc, sur une feuille divisée en petits carrés de 1 millimètre de

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVIII, p. 337.

côté, les coordonnées rectangulaires de chaque point étant l'excès de sa latitude sur 40 degrés, et le produit de sa longitude par cos 40°. Sur une autre feuille, quadrillée comme la première, on a tracé les onze ellipses du n° 46; chacune a été reportée sur papier transparent; puis on l'a réduite ou amplifiée, à l'aide d'un compas de proportion, de manière à en obtenir trois ou quatre autres qui lui soient homothétiques. On a déterminé l'ellipse limite de chacune des onze feuilles ainsi obtenues, puis mesuré en millimètres le diamètre Δ, qui est incliné à 45 degrés sur les axes. Chacun des nombres trouvés a été multiplié par l'arc de 2 minutes, c'est-à-dire par $\frac{\pi}{5400}$, la lettre π représentant le rapport de la circonférence au diamètre; on a pris le quart du produit, puis on a élevé au carré, ce qui a donné la valeur correspondante de l'altération de l'unité de longueur. On a pu ainsi former le tableau suivant :

Numéros des ellipses.	Rapports des axes.	Δ en millimètres.	Valeurs correspondantes de ε.
1......	0	322	0,0022
2......	0,1	321	0,0022
3......	0,2	316	0,0021
4......	0,3	310	0,0020
5......	0,4	303	0,0020
6......	0,5	299	0,0019
7......	0,6	293	0,0018
8......	0,7	292	0,0018
9......	0,8	298	0,0019
10......	0,9	304	0,0019
11......	1	309	0,0020

L'ellipse n° 8 est celle qui correspond au *minimum*. Lorsqu'on la place sur la carte auxiliaire de manière à envelopper l'Espagne, elle en touche le contour aux

points suivants : cap Ortégal, cap Saint-Adrien, île de Tarifa, cap de Creus. Son centre est alors de 21 minutes à l'ouest du méridien de Madrid, et de 22 minutes au nord du parallèle de 40 degrés ; enfin, son grand axe fait, avec la direction des parallèles de la carte, un angle de 12°30′, qu'il faut porter de l'est vers le nord. Avec ces données, il serait facile de calculer A, B, C par les formules (8), (5) et (2). Le mode de représentation se trouverait défini par les expressions (3) de x et de y, après qu'on y aurait remplacé les trois coefficients par les valeurs obtenues. La plus grande altération de l'unité ds longueur serait 0,0018, ou seulement 0,0009 si l'on choisit l'échelle de manière à avoir, au centre et sur l'ellipse limite, des altérations égales et de signes contraires (n° 48).

La demi-longueur du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes de l'ellipse limite est de 146 millimètres. Ayant construit un carré de 146 millimètres de côté, on constate facilement qu'il est possible de le placer sur la carte auxiliaire de manière que le contour de l'Espagne l'enveloppe entièrement. Quand il a cette position, il est impossible qu'une branche d'hyperbole passant par deux de ses sommets soit extérieure au contour ; par conséquent, pour la portion de la contrée couverte par le carré, et à plus forte raison pour la contrée elle-même, la plus grande altération de l'unité de longueur produite par un système de projection correspondant à une valeur de F négative ou supérieure à $\frac{1}{2}$ surpasserait 0,0009. Il est donc inutile de faire une seconde série d'essais portant sur des hyperboles.

Il n'y a pas lieu non plus d'essayer les paraboles. On le reconnaît en constatant que, si une droite de 146 millimètres de longueur a ses deux extrémités en dehors du

contour de la carte auxiliaire, toute parabole passant par ces deux extrémités, et ayant son axe perpendiculaire à la droite, ou bien coupera le contour, ou bien interceptera sur l'axe, entre son sommet et la droite, une longueur moindre que la portion de l'axe comprise entre la même droite et le contour du pays.

59. Le point central que nous avons déterminé se trouve près du méridien de Madrid et dans le voisinage du parallèle de 40 degrés : il convient de le transporter à l'intersection de ces deux lignes. De plus, le grand axe des ellipses ayant une direction peu différente de celle des parallèles de la carte auxiliaire, nous pouvons abandonner les formules (3) et avoir recours aux expressions plus simples (9) de x et de y qui correspondent à $E = 0$. En renouvelant, pour les onze formes d'ellipses, les essais déjà effectués, mais en s'astreignant cette fois à placer l'un des axes sur le parallèle de 40 degrés de la carte provisoire, et l'autre sur le méridien de Madrid, on est conduit à former le tableau suivant :

Numéros des ellipses.	Rapports des axes.	Δ en millimètres.	Valeurs correspondantes de ε.
1......	0	335	0,0024
2......	0,1	333	0,0024
3......	0,2	330	0,0023
4......	0,3	324	0,0022
5......	0,4	315	0,0021
6......	0,5	310	0,0020
7......	0,6	308	0,0020
8......	0,7	306	0,0020
9......	0,8	321	0,0022
10......	0,9	340	0,0024
11......	1	351	0,0026

L'ellipse n° 8 est, comme tout à l'heure, celle qui ré-

duit à son minimum la plus grande valeur de ε. Elle touche le contour de la carte auxiliaire au cap de Creus. La valeur correspondante de A est 0,165. La plus grande altération de l'unité de longueur est 0,0010, soit en plus, soit en moins.

60. Les onze ellipses limites passent dans le voisinage du cap Ortégal, et ce point se trouve à peu près sur le diamètre qui fait des angles de 45 degrés avec les axes; c'est pourquoi il y a peu de différence entre les diverses longueurs de ce diamètre, et, par conséquent, entre les valeurs correspondantes de ε. C'est donc ici le cas de renoncer même aux formules (9) et d'adopter le système remarquable de projection que nous avons étudié en dernier lieu (n° 54); il correspond à l'ellipse n° 1, laquelle se réduit à deux droites parallèles. La plus grande altération de l'unité de longueur ne se trouvera pas beaucoup augmentée par ce nouveau changement : de 0,0010, elle deviendra 0,0012.

Pour introduire les nombres dans la formule (14), nous avons supposé que l'on adoptait l'échelle de $\frac{1}{10000}$. Le rayon équatorial, qui jusqu'ici nous servait d'unité, a été pris égal à 6377398 mètres, et le carré e^2 de l'excentricité de l'ellipse méridienne à 0,0066744; ce sont les valeurs calculées par Bessel. Celles qui ont été obtenues depuis par l'*Ordnance Survey*, savoir 6378284 mètres et 0,0067853, s'adaptent mieux à la forme générale de la surface du globe, puisqu'on a fait concourir à leur détermination un plus grand nombre de mesures effectuées dans des régions très-diverses; mais elles se rapprochent peut-être moins des éléments qu'il conviendrait d'adopter pour l'Espagne en particulier. La connaissance de ces éléments résultera précisément des opérations géodésiques que nécessite la construction

de la carte. En tout cas, les changements que nos résultats devront subir se réduiront à des corrections dont le calcul se fera rapidement.

Appelons Λ l'excès, évalué en demi-degrés, de la latitude d'un parallèle sur 40 degrés, c'est-à-dire posons

$$\lambda = \frac{\pi}{360}\Lambda;$$

la formule (14) nous donnera, pour le rayon du parallèle de la carte exprimé en décimillimètres,

$$R = 1522157,7 - 11108,2622\Lambda - 0,4788\Lambda^2 - 0,1413\Lambda^3.$$

61. Les méridiens et les parallèles de la carte se coupant à angle droit, les axes de l'ellipse indicatrice se trouveront, en chaque point, sur ces deux lignes; a sera la plus grande, et b la plus petite des deux quantités

$$h = -\frac{360}{\pi}\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\Lambda}, \quad k = \frac{R\sin 40^\circ}{r}.$$

La plus grande altération d'angle, au point considéré, sera donnée en secondes par

$$2\omega = \frac{a-b}{\sin 1''}.$$

Le long du parallèle de 40 degrés, les angles sont rigoureusement conservés ainsi que les distances. Pour le parallèle de 36 degrés, qui est le plus au sud, on a

$$\Lambda = -8, \quad R = 1611017,51, \quad \frac{dR}{d\Lambda} = -11121,731,$$

d'où résulte

$$h = 1,002434, \quad K = 1,002387, \quad 2\omega = 10''.$$

Soit ζ un nombre déterminé par la condition

$$\zeta = 1,002434(1 - \zeta) - 1,$$

laquelle donne

$$\zeta = 0{,}001216.$$

Si l'on multiplie tous les termes de R par $1-\zeta$, il viendra

$$R = 1520307 - 11088{,}765\,A - 0{,}478\,A^2 - 0{,}141\,A^3.$$

En adoptant cette nouvelle valeur de R, on ne modifiera pas les altérations d'angles, et l'on réduira de moitié la plus grande altération de l'unité de longueur, qui alors se produira tantôt en plus et tantôt en moins. On trouve, en effet, pour le parallèle de 36 degrés,

$$h = 1 + 0{,}001214, \quad k = 1 + 0{,}001168, \quad 2\omega = 10'',$$

pour celui de 40 degrés,

$$h = 1 - 0{,}001216, \quad k = 1 - 0{,}001216, \quad 2\omega = 0,$$

et pour celui de 43°50′, qui est le plus au nord,

$$h = 1 + 0{,}001016, \quad k = 1 + 0{,}001060, \quad 2\omega = 9''.$$

Enfin, on peut, jusqu'à un certain point, tenir compte des termes de R où Λ entrerait à une puissance supérieure à la troisième, et qui ont été négligés, en modifiant un peu les coefficients des autres termes. Les altérations ne se trouvent diminuées ainsi que de quantités insignifiantes, mais la formule devient un peu plus simple. Nous prendrons définitivement

$$(15) \quad R = 1520344 - 11089{,}03\,A - 0{,}51\,A^2 - 0{,}141\,A^3.$$

Avec cette expression de R, la plus grande altération de l'unité de longueur est 0,00119, et la plus grande altération d'angle n'atteint pas 4 secondes. Ces mêmes altérations seraient respectivement 0,0018 et 12 minutes avec la projection de Bonne, qui a été employée en France par le Dépôt de la Guerre. Elles s'élèveraient à

0,0560 et à 3 degrés si l'on avait recours au développement conique, qui cependant ne diffère du système proposé que par la loi suivant laquelle les rayons des parallèles de la carte dépendent de la latitude. Enfin, sur notre carte, nous pouvons placer les îles Baléares et le Portugal sans que les plus grandes altérations augmentent; il n'en serait pas de même si l'on faisait usage de la projection de Bonne.

62. En résumé, dans le système de projection qui nous paraît le mieux approprié à la construction de la carte d'Espagne, les méridiens sont représentés par des droites partant d'un même point, les parallèles par des circonférences ayant ce point pour centre. L'angle de deux méridiens de la carte est égal au produit de l'angle des méridiens correspondants du globe par le sinus de 40 degrés. Les rayons des parallèles de la carte, supposée construite à l'échelle de $\frac{1}{500000}$, sont donnés, en décimillimètres, par la formule (15), dans laquelle Λ exprime en demi-degrés l'excès de la latitude du parallèle sur 40 degrés. On aura recours aux formules (13), pour calculer les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte. Les altérations d'angles ou de distances sont indépendantes de la longitude.

63. Pour terminer cette application, nous donnerons deux tableaux dont les nombres se rapportent à des latitudes croissant de demi-degré en demi-degré, à partir de 36 degrés, qui est la latitude la plus méridionale de l'Espagne, jusqu'à 44 degrés. Comme le parallèle de 44 degrés est en dehors de la contrée, nous avons introduit aussi dans nos tableaux la latitude de 43°50', qui est celle du point le plus septentrional.

Le premier tableau fait connaître les rayons de cour-

bure et les grandes normales de l'ellipse méridienne, le rayon équatorial étant pris pour unité, puis les longueurs des mêmes lignes et celles des rayons des parallèles terrestres, exprimées en mètres, le rayon équatorial étant supposé égal à 6377398 mètres.

l	ρ	N	ρ	N	r
36° 0′	0,99677137	1,00115497	6356808 m	6384764 m	5165382 m
36,30	0,99685462	1,00118284	6357339	6384941	5132579
37, 0	0,99693833	1,00121087	6357872	6385120	5099384
37,30	0,99702247	1,00123903	6358409	6385300	5065799
38, 0	0,99710701	1,00126733	6358948	6385480	5031827
38,30	0,99719194	1,00129576	6359490	6385662	4997471
39, 0	0,99727723	1,00132430	6360034	6385844	4962733
39,30	0,99736284	1,00135296	6360580	6386026	4927615
40, 0	0,99744875	1,00138171	6361128	6386210	4892120
40,30	0,99753494	1,00141055	6361677	6386394	4856252
41, 0	0,99762139	1,00143948	6362229	6386578	4820012
41,30	0,99770806	1,00146848	6362781	6386763	4783403
42, 0	0,99779492	1,00149754	6363335	6386948	4746428
42,30	0,99788196	1,00152666	6363890	6387134	4709089
43, 0	0,99796915	1,00155583	6364446	6387320	4671390
43,30	0,99805645	1,00158503	6365003	6387506	4633333
43,50	0,99811471	1,00160452	6365375	6387631	4607765
44, 0	0,99814385	1,00161427	6365561	6387693	4594922

Dans le second tableau, on trouvera les rayons des parallèles de la carte exprimés en décimillimètres; leurs dérivées par rapport à Λ changées de signe; les rapports des arcs infiniment petits de méridiens, sur la carte, aux arcs correspondants du globe; les rapports analogues pour les arcs de parallèles. Ces rapports sont ici les axes de l'ellipse indicatrice; jusqu'à 40 degrés, le grand axe se trouve sur le parallèle, et le petit sur le méridien; le contraire a lieu à partir de 40 degrés. L'avant-dernière colonne renferme les plus grandes altérations d'angles

évaluées en secondes; elles sont très-faibles, parce que les deux axes de l'ellipse indicatrice diffèrent peu l'un de l'autre; la plus grande différence n'atteint pas 0,00002. Pour la même raison, on peut considérer l'altération de l'unité de longueur, en chaque point, comme ne variant pas avec la direction. Les valeurs de cette altération sont contenues dans la dernière colonne.

l	R	$-\frac{dR}{d\Lambda}$	h	K	2ω	ε
° ′	dmm				″	
36, 0	1609096	11107,94	1+0,001191	1+0,001191	0	+ 0,00119
36,30	1597991	11102,62	0628	0636	2	063
37, 0	1586890	11098,14	0141	0153	3	015
37,30	1575794	11094,50	1 −0,000272	1−0,000256	3	− 0,00026
38, 0	1564701	11091,72	0607	0591	3	060
38,30	1553610	11089,78	0867	0853	3	086
39, 0	1542521	11088,68	1051	1041	2	105
39,30	1531433	11088,43	1160	1154	1	116
40, 0	1520344	11089,03	1192	1192	0	119
40,30	1509254	11090,47	1148	1154	1	115
41, 0	1498163	11092,76	1028	1039	2	103
41,30	1487069	11095,90	0833	0848	3	084
42, 0	1475971	11099,88	0562	0579	3	057
42,30	1464868	11104,70	0214	0232	4	022
43, 0	1453761	11110,38	1+0,000210	1+0,000194	3	+ 0,00020
43,30	1442647	11116,90	0708	0701	2	070
43,50	1435235	11121,71	1084	1083	0	108
44, 0	1431527	11124,26	1283	1288	1	129

Chaque feuille de la carte sera un véritable levé topographique, l'échelle variant, mais très-lentement avec la latitude, de 8 décimètres moins 1 millimètre à 8 décimètres plus 1 millimètre, pour 4 myriamètres. La longueur de 8 décimètres est celle du grand côté du cadre dans les feuilles de la carte de France.

Carte d'une zone. Carte d'un fuseau. Cartes ayant pour objet la conservation des aires.

64. La méthode que nous avons suivie dans la recherche du système de projection le mieux approprié à la représentation d'une contrée particulière ne suppose pas nécessairement que cette contrée soit peu étendue dans les deux sens; on peut l'appliquer à toute la zone comprise entre deux parallèles dont les latitudes ne diffèrent pas trop l'une de l'autre, et aussi à un fuseau limité par deux méridiens dont l'angle n'est pas trop considérable. On développe, dans le premier cas, suivant les puissances de s, et, dans le second, suivant celles de m. La condition que les altérations d'angles soient du troisième ordre seulement, et les altérations de distances, du second, suffisent pour déterminer complétement les formules; il ne reste pas, dans celles-ci, de coefficients dont on ait la faculté de disposer pour réduire à son *minimum* la plus grande altération de l'unité de longueur.

65. Pour une zone comprise entre deux parallèles, le mode de projection auquel on se trouve conduit est celui des méridiens rectilignes et des parallèles circulaires définis par les formules (12) et (13); on devait s'y attendre d'après la remarque que nous avons faite à la fin du n° 54.

Appliqué à la zone comprise entre les parallèles de 37° 30′ et 52° 30′, zone dont fait partie l'Europe centrale, et qui occupe plus du sixième de la surface du globe, le système que nous venons d'indiquer ne produit pas d'altérations au-dessus de 1′ 20″ pour les angles, ni au-dessus de $\frac{1}{230}$ pour l'unité de longueur. Avec la projection de Bonne, les limites analogues eussent été respectivement 14° 40 et $\frac{1}{7}$.

Pour toute l'Algérie, c'est-à-dire pour le Tell et le Sahara algériens, les limites d'altérations sont, avec notre système, 3″ et $\frac{1}{2000}$, tandis qu'avec la projection de Bonne elles seraient 11′ et $\frac{1}{600}$; et l'on pourrait, sans augmenter les deux premières, placer sur la carte la régence de Tunis et la plus grande partie de l'empire du Maroc.

66. Quand il s'agit d'un fuseau, on trouve que le mode de projection qui remplit les conditions énoncées est celui des formules

$$(16)\qquad x = s + \frac{1}{2} r m^2 \sin l,\quad y = rm\left(1 + \frac{1}{6} m^2 \cos 2l\right).$$

De ces formules on déduit

$$\theta = m^3 \sin l\left(\frac{5}{6} - \sin^2 l\right),\quad h - k = \frac{1}{300} m^2 \cos^4 l.$$

On a d'ailleurs

$$(a-b)^2 = (h-k)^2 + \theta^2,\quad 2\omega = \frac{a-b}{\sin 1''},$$

ω étant exprimé en secondes. Quant à l'altération de l'unité de longueur, elle est

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(m \cos l)^2,$$

ou seulement la moitié de cette quantité si l'on suppose l'échelle choisie de manière que les altérations soient deux à deux égales et de signes contraires.

Pour un fuseau de 15 degrés on aura, comme limites des altérations, 1′20″ et $\frac{1}{230}$; avec la projection de Bonne, on aurait eu 7°30′ et $\frac{1}{15}$.

Le territoire de l'Égypte proprement dite se compose

d'une longue vallée encaissée, depuis Assouan jusqu'au Caire, par deux chaînes de montagnes dont les versants extérieurs s'étendent dans de vastes déserts. Il n'y a pas à se préoccuper de ces déserts, dans la construction de la carte; on doit plutôt songer à l'étendre au sud d'Assouan en remontant le Nil. Nous supposerons donc qu'il s'agisse d'une contrée située entre le neuvième et le trente-deuxième degré de latitude avec une étendue en longitude de 5 degrés. Le mode de projection à adopter sera celui des formules (16), lequel donnera pour limite des deux altérations $5''$ et $\frac{1}{2000}$, tandis que la projection de Bonne aurait donné $25'$ et $\frac{1}{250}$.

67. Pour certaines cartes qui ont un but spécial, la condition la plus importante à remplir est la conservation des aires. On peut se proposer de chercher le système de projection qui, tout en ne modifiant celles-ci que de quantités négligeables, réduit à son *minimum* la plus grande altération d'angle. Cette question, que nous ne faisons qu'indiquer, se résoudra par une méthode analogue à celle que nous avons employée dans la résolution de la question inverse.

(*A suivre.*)

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n;$$

PAR M. DESBOVES.

[SUITE (*).]

III. — RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^3 + bY^3 = cZ^n,$$

n ÉTANT ÉGAL A 2, 3 OU 4, ETC.

8. *Résolution de l'équation*

(35) $$aX^3 + bY^3 = Z^2.$$

On a supposé ici que c était égal à 1, car, s'il en était autrement, on multiplierait les deux membres de l'équation par c et l'on poserait

$$cZ = Z_1.$$

Maintenant, si l'on fait U égal à zéro, l'identité (16) devient

(36) $$X^3 + rY^3 = Z^2,$$

et la dernière des formules (17) donne

$$z = -\frac{y^2}{2x}.$$

Alors, en substituant cette valeur de z dans les expres-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 265.

sions de X, Y, Z (17) et (15), on a

$$X = \frac{4x(x^3 - ry^3)}{4x^2}, \quad Y = \frac{y(8x^3 + ry^3)}{4x^2},$$

$$Z = \frac{8x^6 + 20\,rx^3y^3 - r^2y^6}{8x^2};$$

et, en remplaçant dans l'équation (36) X, Y, Z par les expressions précédentes, puis r par $\frac{b}{a}$, on obtient l'identité

$$a[4x(ax^3 - by^3)]^3 + b[y(8ax^3 + by^3)]^3$$
$$= (8a^2x^6 + 20\,abx^3y^3 - b^2y^6)^2.$$

Il suit de là que l'équation (35) a une infinité de solutions entières données par les formules

$$X = 4x(ax^3 - by^3),$$
$$Y = y(8ax^3 + by^3),$$
$$Z = 8a^2x^6 + 20\,abx^3y^3 - b^2y^6,$$

dans lesquelles x et y sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

9. *Recherche des cas où l'on peut résoudre en nombres entiers l'équation*

(37) $$aX^3 + bY^3 = cZ^3.$$

Si l'on essaye d'imiter la méthode suivie dans le numéro précédent, en faisant U = o dans la dernière des formules (19), on est conduit à l'équation

$$x^2z + xy^2 + ryz^2 = 0;$$

mais, cette équation étant du second degré par rapport aux trois variables x, y, z, on ne pourra pas trouver ainsi une infinité de solutions de l'équation (37), quels que soient a, b, c. On sait d'ailleurs que l'équation (37)

est souvent impossible : nous allons donc chercher un certain nombre de cas où elle peut être résolue en nombres entiers, en partant d'identités que nous allons d'abord établir.

Prenons pour point de départ l'identité évidente

$$(38)\qquad (X+Y)^3+(X-Y)^3=2(X^2+3Y^2)X.$$

En y faisant $X=x^3$, $Y=y$, on a d'abord

$$(39)\qquad (x^3+y)^3+(x^3-y)^3=2(x^6+3y^2)x^3.$$

Faisons maintenant dans l'identité (38) un changement de variables tel, que X^2+3Y^2 devienne un cube. Pour cela donnons à a et b respectivement les valeurs 0 et 3 dans les équations (5), (8) et (9) du n°4 : on a ainsi

$$X=x^3-9y^2x,\quad Y=3x^2y-3y^3,\quad Z=x^2+3y^2,$$
$$X^2+3Y^2=(x^2+3y^2)^3;$$

et, en remplaçant dans l'identité (38) X, Y, Z, X^2+3Y^2 par les expressions précédentes, on a, après le changement de y en $\frac{y}{3}$,

$$(9x^3-9xy^2+9x^2y-y^3)^3+(9x^3-9xy^2-9x^2y+y^3)^3$$
$$=(x-y)(x+y)2x[3(3x^2+y^2)]^3.$$

Comme, dans le produit $(x-y)(x+y)2x$, le troisième facteur est la somme des deux autres, on pose

$$x+y=x_1,\quad x-y=y_1,$$

et, si l'on remplace dans l'identité précédente x et y par $\frac{x_1+y_1}{2}$, $\frac{x_1-y_1}{2}$, on a, en effaçant les accents,

$$(40)\quad \begin{cases}[x^3-y^3+3xy(2x+y)]^3+[y^3-x^3+3xy(2y+x)]^3\\ \quad =xy(x+y)[3(x^2+xy+y^2)]^3.\end{cases}$$

En changeant, dans cette dernière identité, y en $y^3 - x$, on a celle-ci :

$$(41)\left\{\begin{aligned}&(-x^3-y^9+6xy^6-3x^2y^3)^3+(x^3+y^9+3xy^6-6x^2y^3)^3\\&\quad=x(y^3-x)\,[3\,y\,(x^2-xy^3+y^6)]^3.\end{aligned}\right.$$

L'identité (40) a déjà été donnée par M. E. Lucas, qui y a été conduit par des considérations géométriques; on peut encore la démontrer comme il suit.

Si l'on part des équations (18) et (19) du n° 5, en égalant U à zéro, on a

$$r = -\frac{x(xz+y^2)}{yz^2},$$

et, par suite,

$$X_1 = -\frac{x}{y^2z^2}(y^6+3x^2y^2z^2-x^3z^3+6xzy^4),$$

$$Y_1 = -\frac{3x}{yz}(y^4+x^2z^2+xzy^2),$$

$$U_1 = \frac{x}{y^2z^2}(x^3z^3+3xzy^4+6x^2y^2z^2-y^6).$$

Alors, en substituant, dans l'équation (18), pour X_1, Y_1, U_1, les expressions précédentes, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}&[y^6-x^3z^3+3xzy^2(2y^2+xz)]^3\\&\qquad+[x^3z^3-y^6+3xzy^2(2xz+y^2)]^3\\&\qquad= xzy^2(xz+y^2)\,[3(y^4+x^2z^2+xzy^2)]^3;\end{aligned}$$

mais, si l'on y fait

$$y^2 = x_1, \quad xz = y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a l'identité (40).

Pour obtenir une nouvelle identité, faisons a et b égaux à 1 dans les équations (5), (8) et (9); alors on a

$$X = x^3 - 3xy^2 - y^3,$$
$$Y = 3xy(x+y),$$
$$X^2 + XY + Y^2 = (x^2+xy+y^2)^3,$$
$$X - Y = x^3 - y^3 - 3xy(2x+y).$$

Si maintenant on multiplie, membre à membre, les deux dernières équations, il vient

$$X^3 - Y^3 = [x^3 - y^3 - 3xy(x+2y)](x^2+xy+y^2)^3,$$

ou

$$(42) \quad \begin{cases} (x^3 - 3xy^2 - y^3)^3 - [3xy(x+y)]^3 \\ \quad = [x^3 - y^3 - 3xy(x+2y)](x^2+xy+y^2)^3. \end{cases}$$

C'est l'identité qu'il s'agissait de trouver

Remarque. — L'identité (42) conduit à une nouvelle démonstration de l'identité (40).

En effet, si l'on permute x, y dans l'identité (42) et que l'on retranche, membre à membre, cette dernière identité de celle qu'on a obtenue, on a

$$\begin{aligned}(x^3 - y^3 + 3x^2y)^3 + (x^3 - y^3 - 3xy^2)^3 \\ = (x-y)(x+2y)(2x+y)(x^2+xy+y^2)^3.\end{aligned}$$

Or, comme dans le produit $(x-y)(x+2y)(2x+y)$ le troisième facteur est égal à la somme des deux autres, par un changement de variables dont le choix est évident, on est conduit à l'identité (40).

Je vais maintenant démontrer une identité plus générale que les précédentes, et qui donnera quelques-unes d'entre elles comme cas particuliers.

D'après le théorème I (2) étendu à quatre facteurs dont trois sont égaux, on peut écrire

$$X_1^2 + X_1Y_1 + Y_1^2 = (x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)(x^2 + xy + y^2)^3,$$
ou

$$(43) \quad X_1^3 - Y_1^3 = (X_1 - Y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)(x^2 + xy + y^2)^3.$$

X_1 et Y_1 sont d'ailleurs obtenus en remplaçant, dans les formules (2), d'abord X, Y, x, y, a, b respectivement par X_1, Y_1, X, Y, 1, 1, puis X, Y par les expressions que donnent les formules (8), c'est-à-dire que

l'on a

$$X_1 = x^3 x_1 - 3xy^2 x_1 - y^3 x_1 - 3x^2 y y_1 - 3xy^2 y_1,$$
$$Y_1 = x^3 y_1 - y^3 y_1 + 3x^2 y y_1 + 3x^2 y x_1 + 3xy^2 x_1,$$
$$X_1 - Y_1 = (x^3 - y^3 - 6xy^2 - 3x^2 y)\, x_1 + (y^3 - x^3 - 6x^2 y - 3xy^2)\, y_1.$$

On voit alors que, a et b étant égaux à 1 dans l'équation (37), on pourra prendre pour c la valeur donnée par la formule

$$(44) \qquad c = (X_1 - Y_1)(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2),$$

l'expression de $X_1 - Y_1$ étant obtenue par la dernière équation.

Il est visible d'abord que, si dans l'expression (44) on fait successivement $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, et $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, on trouve pour c les valeurs données par les identités (40) et (42) ; ces identités elles-mêmes sont donc la conséquence de l'identité générale.

Donnons encore à x_1 et y_1 les valeurs x et $-y$; alors on a

$$c = (x^3 + y^3)(x - y)^3,$$

et l'identité générale devient

$$(45) \quad [x(x^3 + 2y^3)]^3 + [-y(y^3 + 2x^3)]^3 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)^3.$$

On peut conclure de tout ce qui précède que, si dans l'équation (37) a et b sont égaux à 1, cette équation pourra être résolue lorsque c aura l'une des formes suivantes :

$$2(x^6 + 3y^2), \quad xy(x + y), \quad x(y^3 - x),$$
$$x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y), \quad x^3 + y^3.$$

Toutes ces formes, à l'exception de la première, dérivent de la forme générale (44) ; mais elles sont toutes utiles à connaître pour les applications numériques.

Je vais maintenant établir des identités correspondant au cas où a et b ont des valeurs quelconques. Supposons que la fonction Z (15) soit multipliée par la fonction $x_1^3 + ry_1^3 + r^2 z_1^3 - 3rx_1y_1z_1$, que nous représentons par Z_1, et, pour plus de simplicité dans les calculs, faisons d'abord $z = 0$ dans les formules (15) et (19); ce qui donne

$$X = x^3 + ry^3, \quad Y = 3x^2y, \quad U = 3xy^2, \quad Z = x^3 + ry^3.$$

Si l'on suppose maintenant que le second membre de l'identité (18) soit multiplié par Z_1, et que l'on désigne par X′, Y′, U′ les valeurs qui remplacent X_1, Y_1, U_1 dans le premier membre, on aura par le calcul ordinaire, mais en posant, pour plus de simplicité, $y_1 = 1$, $z_1 = 0$,

$$\begin{aligned} X' &= (x^3 + ry^3)x_1 + 3rxy^2, \\ Y' &= x^3 + ry^3 + 3x^2yx_1, \\ U' &= 3xy(yx_1 + x). \end{aligned}$$

On a aussi

$$Z_1 = x_1^3 + r.$$

En égalant U′ à zéro, on a

$$x_1 = -\frac{x}{y},$$

et, en substituant cette valeur de x_1 dans X′, Y′, Z_1, on a

$$X' = \frac{x(2ry^3 - x^3)}{y}, \quad Y' = \frac{-y(2x^3 - ry^3)}{y}, \quad Z_1 = \frac{ry^3 - x^3}{y^3};$$

d'où, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, on déduit l'identité

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & a[x(ax^3 + 2by^3)]^3 + b[-y(2ax^3 + by^3)]^3 \\ & \quad = (ax^3 + by^3)(ax^3 - by^3)^3. \end{aligned} \right.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème V. — *a et b ayant des valeurs quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation* (37) *puisse être résolue en nombres entiers, Z étant différent de l'unité.*

On peut trouver pour c une expression qui contienne autant de variables que l'on veut, en multipliant successivement les deux membres de l'équation (18) par des fonctions Z_1, Z_2, Z_3, ... (on désigne, en général, par Z_p la fonction $x_p^3 + ry_p^3 + r^2 z_p^3 - 3rx_p y_p z_p$) et en remplaçant, dans le premier membre, X_1, Y_1, U_1 par les fonctions qui correspondent à la dernière multiplication. On égalerait ensuite à zéro la fonction que remplace U après les multiplications. On pourra d'ailleurs disposer des indéterminées pour trouver autant d'identités que l'on voudra, plus ou moins simples. Si, par exemple, on multiplie par deux facteurs Z_1, Z_2, et que l'on fasse, pour simplifier,

$$z = 0, \quad x_1 = -\frac{x^3 + ry^3}{3x^2y}, \quad y_1 = 1,$$
$$z_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z_2 = 0, \quad y_2 = 1,$$

en effectuant les calculs ordinaires, on tombe sur l'identité

$$(47)\left\{\begin{aligned} &a[3bxy^2(by^2 - 2ax^3)]^3 + b(a^2x^6 + b^2y^6 - 7abx^3y^3)^3 \\ &= b(a^3x^9 + b^3y^9 - 24a^2bx^6y^3 + 3ab^2x^3y^6)(ax^3 + by^3)^3, \end{aligned}\right.$$

qui conduit à une nouvelle forme de c correspondant à des valeurs arbitraires de a et b.

10. *Recherche des formules qui permettent de déduire d'une première solution de l'équation* (37) *une infinité d'autres solutions.*

Premier cas. — *a et b sont égaux à l'unité.* Supposons que, dans l'identité (45), x et y, au lieu d'être

des nombres entiers quelconques, forment avec une troisième variable z une solution de l'équation (37); alors, dans cette identité, on peut remplacer x^3+y^3 par cz^3, et son second membre peut s'écrire $c[z(x^3-y^3)]^3$. Il suit de là que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (37), on aura une seconde solution X, Y, Z par les formules

$$(48)\qquad \begin{cases} X = x(x^3+2y^3), \\ Y = -y(2x^3+y^3), \\ Z = z(x^3+y^3): \end{cases}$$

ce sont les formules de Prestet et d'Euler.

On voit de même que, si l'on change, dans l'identité (40), x et y en x^3 et y^3, puis que l'on remplace x^3+y^3 par cz^3, à une première solution (x, y, z) de l'équation (37) correspond une seconde solution (X, Y, Z), donnée par les formules

$$(49)\qquad \begin{cases} X = x^9 - y^9 + 3x^3y^3(2x^3+y^3), \\ Y = y^9 - x^9 + 3x^3y^3(2y^3+x^3), \\ Z = 3xyz(x^6+x^3y^3+y^6). \end{cases}$$

Ces dernières formules sont dues à M. Lucas.

Deuxième cas. — *a et b sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.* Remplaçons, dans l'identité (46), ax^3+by^3 par cz^3; on voit alors que, en désignant par (x, y, z), (X, Y, Z) deux solutions de l'équation (37), on a les formules suivantes, telles qu'on les déduit de la méthode de Lagrange (*) :

$$(50)\qquad \begin{cases} X = x(ax^3+2by^3), \\ Y = -y(2ax^3+by^3), \\ Z = z(ax^3-by^3). \end{cases}$$

(*) *Voir* le Mémoire de Lagrange déjà cité en commençant : *De quelques problèmes de l'Analyse de Diophante.*

11. ***Formules qui donnent une troisième solution de l'équation (37) lorsqu'on en connaît deux autres.***

Soient (x, y, z), (x', y', z') les deux premières solutions et (x'', y'', z'') la troisième. En exprimant que (x, y, z), (x', y', z') sont deux solutions de l'équation, on obtient

$$\frac{a}{z^3y'^3 - y^3z'^3} = \frac{b}{x^3z'^3 - z^3x'^3} = \frac{c}{x^3y'^3 - y^3x'^3};$$

a, b, c peuvent donc être considérés comme respectivement égaux aux binômes $z^3y'^3 - y^3z'^3$, $x^3z'^3 - z^3x'^3$, $x^3y'^3 - y^3x'^3$.

Cela posé, ajoutant, membre à membre, les deux identités évidentes

$$(u^2 - v)^3 - (v^2 - u)^3 = (u^3 - v^3)(u^3 + v^3 + 1 - 3uv),$$
$$(uv^2 - u^2)^3 - (vu^2 - v^2)^3 = (u^3 - v^3)(-u^6 - v^3 - u^3v^3 + 3u^2v^2),$$

on a

$$(1 - v^3)(u^2 - v)^3 + (u^3 - 1)(v^2 - u)^3 = (u^3 - v^3)(1 - uv)^3,$$

ou encore, après avoir remplacé u et v respectivement par $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$,

$$(y'^3 - y^3)(x^2y' - x'^2y)^3 + (x^3 - x'^3)(y^2x' - xy'^2)^3$$
$$= (x^3y'^3 - y^3x'^3)(x'y' - xy)^3 \ (*).$$

Si maintenant on change, dans l'identité précédente, x, y, x', y' en $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, il vient

$$(z^3y'^3 - y^3z'^3)(x^2y'z' - x'^2yz)^3 + (x^3z'^3 - z^3x'^3 (y^2x'z' - y'^2xz)^3$$
$$= (x^3y'^3 - y^3x'^3)(z^2x'y' - z'^2xy)^3,$$

(*) Cette identité montre que l'on peut trouver une infinité de nombres entiers qui soient, de deux manières différentes, la somme de trois cubes entiers.

ou encore, en tenant compte de la remarque faite en commençant,

$$a(x^2y'z' - x'^2yz)^3 + b(y^2x'z' - y'^2xz)^3 = c(z^2x'y' - z'^2xy)^3;$$

on a donc les formules demandées

$$(51)\qquad \begin{cases} x'' = x^2y'z' - x'^2yz, \\ y'' = y^2x'z' - y'^2xz, \\ z'' = z^2x'y' - z'^2xy. \end{cases}$$

Les formules précédentes sont plus simples que celles de Cauchy; mais elles s'en déduisent aisément et donnent, d'ailleurs, la même solution. On voit aussi, à l'aide de ces mêmes formules, que, si l'on avait la relation

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = 0,$$

on retomberait sur la solution (x, y, z): il en est ainsi, par exemple, lorsque (x, y, z), (x', y', z') sont deux solutions consécutives données par les formules de Lagrange.

12. *Résolution en nombres entiers de l'équation*

$$(52)\qquad aX^3 + bY^3 = cV^4.$$

On multiplie les deux membres de l'équation (20) par un facteur Z_1, défini comme au n° 9, et, en posant

$$z = 0, \quad z_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad r = \frac{b}{a},$$

par un calcul tout semblable à celui qui a donné l'identité (46), on obtient

$$(53)\qquad \begin{cases} a[x(4a^2x^6 - 19abx^3y^3 + 4b^2y^6)]^3 \\ \qquad + b[y(10a^2x^6 - 16abx^3y^3 + b^2y^6)]^3 \\ = (64a^3x^9 - 168a^2bx^6y^3 + 12ab^2x^3y^6 + b^3y^9)(ax^3 + b) \end{cases}$$

Et ainsi se trouve démontré le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on pourra trouver une infinité de valeurs de c, telles que l'équation* (52) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Nous nous arrêtons ici dans la résolution de l'équation $aX^3 + bY^3 = cZ^n$; car on voit assez, par ce qui précède, comment on trouvera, pour toutes les valeurs de n, une identité analogue à l'identité (53).

13. En partant des identités fondamentales qui ont été établies dans la Section II, on peut quelquefois parvenir à des identités qui conduisent à la résolution de nouvelles équations. J'en citerai un seul exemple.

On déduit d'abord aisément des équations (15), (16) et (17) celle-ci :

$$\begin{aligned} Z^2 + 3XYU = {} & (x^3 + ry^3 + r^2z^3 + 6rxyz)^2 \\ & + 6r(y^2 - xz)(x^2 - ryz)(rz^2 - xy); \end{aligned}$$

d'où il suit que, si l'on résout par rapport à x, y ou z l'une des équations

$$y^2 = xz, \quad x^2 = ryz, \quad rz^2 = xy,$$

le second membre de l'identité précédente se réduit à un carré. Si l'on prend, par exemple, z égal à $\frac{y^2}{x}$, ce second membre devient $\frac{(x^6 + 7rx^3y^3 + r^2y^6)^2}{x^6}$, et les valeurs de X, Y, U, Z s'obtiennent en remplaçant dans les formules (15) et (17) z par $\frac{y^2}{x}$. Si alors, comme à l'ordinaire, on change r en $\frac{b}{a}$, on a finalement l'identité

$$(54) \left\{ \begin{aligned} & a[x(ax^3+2by^3)]^3 + b[y(by^3+2ax^3)]^3 + a^2b^2(3x^2y^2)^3 \\ & \quad = (a^2x^6 + 7abx^3y^3 + b^2y^6)^3, \end{aligned} \right.$$

à laquelle M. Lucas est aussi parvenu, mais autrement. L'identité (54) donne évidemment le moyen d'obtenir une infinité de solutions de l'équation

$$aX^3 + bY^3 + a^2b^2U^3 = Z^2.$$

(*A suivre.*)

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878, POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

SOLUTION DE M. L. DE LAUNAY,
Élève du lycée Fontanes (classe de M. Desboves) (*).

Déterminer les rayons des deux bases d'un tronc de cône, connaissant : 1° la hauteur h du tronc; 2° le volume, qui est équivalent aux $\frac{3}{4}$ de la sphère de diamètre h ; 3° la surface latérale équivalente à celle du cercle de rayon a.

On ne considérera que les troncs formés par des plans qui coupent les arêtes d'un même côté du sommet, et l'on indiquera le nombre des solutions qui correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{a}{h}$.

Soient x et y les deux rayons de bases, l'expression du volume sera $\frac{\pi h}{3}(x^2+y^2+xy)$, et comme, par hypothèse, elle est égale aux $\frac{3}{4}$ du volume d'une sphère de diamètre h, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\pi h^3$ ou $\frac{1}{8}\pi h^3$, on a la

(*) Premier prix du Concours général.

première équation du problème

$$\frac{\pi h}{3}(x^2+y^2+xy)=\frac{1}{8}\pi h^3,$$

ou, en supprimant le facteur commun πh et multipliant par 3 les deux membres de l'équation,

$$(1) \qquad x^2+y^2+xy=\frac{3}{8}h^2.$$

La surface latérale a pour expression (l désignant l'apothème du tronc) $\pi l(x+y)$ ou $\pi\sqrt{h^2+(x-y)^2}(x+y)$; on a donc, après avoir élevé au carré, la seconde équation du problème

$$(2) \qquad (x+y)^2[h^2+(x-y)^2]=a^4.$$

Pour résoudre le système des équations (1) et (2), on peut employer plusieurs méthodes.

Première méthode. — Prenons pour inconnues auxiliaires la somme des rayons et leur différence; en remarquant que l'on a identiquement

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2,$$

la première équation devient

$$(x+y)^2-\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=\frac{3}{8}h^2,$$

ou, toutes réductions faites,

$$(3) \qquad 6(x+y)^2+2(x-y)^2=3h^2,$$

d'où, en substituant dans cette équation la valeur de $(x+y)^2$ tirée de l'équation (2),

$$\frac{6a^4}{h^2+(x-y)^2}+2(x-y)^2=3h^2,$$

ou

$$6a^4+2h^2(x-y)^2+2(x-y)^4=3h^4+3h^2(x-y)^2,$$

d'où l'on déduit l'équation définitive

$$(4) \qquad 2(x-y)^4 - h^2(x-y)^2 + 6a^4 - 3h^4 = 0.$$

Nous sommes ramenés à résoudre une équation bicarrée en $x-y$, d'où l'on tire

$$x-y = \pm\sqrt{\frac{h \pm \sqrt{h^4 - 8(6a^4 - 3h^4)}}{4}}.$$

$$x-y = \pm\frac{\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}}{2}.$$

Mais, les équations (1) et (2) étant symétriques par rapport à x et y, on peut convenir d'appeler toujours x la plus grande des deux quantités x et y ; $x-y$ est alors toujours positif et l'on a finalement

$$(5) \qquad x-y = \frac{\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}}{2}.$$

Portons maintenant ces valeurs de $x-y$ dans l'équation (3), il vient

$$6(x+y)^2 = 3h^2 - \frac{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{2}$$

$$= \frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{2},$$

d'où enfin

$$(6) \qquad x+y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}}.$$

Maintenant ces valeurs de $x-y$ et de $x+y$ étant connues, on en déduit x et y par les équations

$$(7)\ x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}},$$

$$(8)\ y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}.$$

Discussion. — Pour que les valeurs de x et de y soient admissibles, il faut d'abord qu'elles soient réelles. Pour que $(x-y)^2$ soit réel, il faut que la quantité $25h^4 - 48a^4$ soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$(9) \qquad \frac{a^4}{h^4} < \frac{25}{48}, \quad \frac{a}{h} < \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[4]{3}}.$$

Mais une valeur de $(x-y)^2$ admissible doit être non-seulement réelle, mais encore positive pour que $x-y$ soit réel.

Or, le produit des racines de l'équation (4) est $\frac{6a^4 - 3h^4}{2}$; nous sommes donc conduits à distinguer trois cas, suivant que $6a^4 - 3h^4$ sera supérieur, inférieur ou égal à zéro, c'est-à-dire suivant que $\frac{a^4}{h^4}$ sera supérieur, inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$; ces trois hypothèses sont d'ailleurs possibles, puisque $\frac{1}{2}$ est plus petit que $\frac{25}{48}$; nous avons donc déjà pour $\frac{a^4}{h^4}$ deux valeurs principales $\frac{1}{2}$, $\frac{25}{48}$.

D'ailleurs, l'équation (3) étant du premier degré par rapport à $(x+y)^2$, à chaque valeur de $x-y$ correspondra une valeur de $(x+y)^2$; pour que cette valeur soit admissible, il faut qu'elle soit positive, c'est-à-dire, d'après l'équation (3), que $3h^2$ soit plus grand que $2(x-y)^2$; nous devons donc comparer $\frac{3}{2}h^2$ à $(x-y)^2$; or, en substituant $\frac{3}{2}h^2$ à $(x-y)^2$ dans l'équation (4), on obtient $\frac{9}{2}h^4 - \frac{3}{2}h^4 + 6a^4 - 3h^4$ ou $6a^4$.

Le résultat de la substitution est donc toujours positif et par suite la valeur de $(x+y)^2$ positive.

D'ailleurs, pour que x et y soient positifs, il faut que $x-y$ soit plus petit que $x+y$, ou

$$6(x-y)^2<6(x+y)^2,$$
$$6(x-y)^2<3h^2-2(x-y)^2,$$
$$8(x-y)^2<3h^2,$$
$$(x-y)^2<\frac{3}{8}h^2.$$

Comparons donc $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$, et pour cela substituons $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ dans l'équation (4) ; le résultat de la substitution est

$$\frac{9}{32}h^4-\frac{3}{8}h^4+6a^4-3h^4=\frac{9h^4-12h^4-96h^4+192a^4}{32},$$

ou enfin

$$\frac{192a^4-99h^4}{32}.$$

Nous sommes donc conduits à distinguer trois cas, suivant que $192\,a^4$ est supérieur, égal ou inférieur à $99h^4$, c'est-à-dire suivant que $\frac{a^4}{h^4}$ est supérieur, égal ou inférieur à $\frac{99}{192}$.

D'ailleurs $\frac{99}{192}$ est égal à $\frac{1}{2}+\frac{3}{192}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{64}$, quantité plus petite que $\frac{25}{48}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{48}$.

Cela posé (*), faisons croître $\frac{a^4}{h^4}$, en passant par les

(*) Un tableau de la discussion permet de la suivre plus facilement.

trois valeurs principales que nous avons trouvées et qui, rangées dans l'ordre croissant, sont $\frac{1}{2}$, $\frac{99}{192}$, $\frac{25}{48}$.

Supposons d'abord $\frac{a^4}{h^4}$ plus petit que $\frac{1}{2}$; alors, dans l'équation (4), le produit des racines est négatif; l'une d'elles est négative et à rejeter, l'autre est positive.

Mais $\frac{a^4}{h^4}$ est aussi plus petit que $\frac{99}{192}$, et $192a^4 - 99h^4$ est plus petit que o; le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ est donc négatif; l'une des valeurs de $(x-y)^2$ est plus petite que $\frac{3}{8}h^2$ et l'autre plus grande; comme il y a une racine négative, c'est elle qui est plus petite; l'autre est plus grande et à rejeter : donc, dans ce cas, o solution.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{1}{2}$, le produit des racines est égal à zéro : l'une des valeurs de $(x-y)^2$ est donc nulle ; il y a dans ce cas une solution : un cylindre.

D'ailleurs, l'autre racine est plus grande que $\frac{3}{8}h^2$ et à rejeter.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{99}{192}$, le produit des racines est positif, et, comme leur somme l'est aussi, elles sont toutes deux positives; d'ailleurs, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ étant toujours négatif, une seule de ces racines est admissible : on n'a donc pour $x-y$ et $x+y$ qu'une seule valeur et par suite un seul système de valeurs pour x et y.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{99}{192}$, le résultat de la substitution

de $\frac{3}{8}h^2$ est nul ; $\frac{3}{8}h^2$ est donc une des racines de l'équation en $(x-y)^2$; par suite, pour cette racine, $x-y$ est égal à $x+y$ et y est nul, c'est-à-dire qu'on a un cône ; d'ailleurs l'autre solution est admissible.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est compris entre $\frac{99}{192}$ et $\frac{25}{48}$, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ est positif ; donc les deux racines sont ou toutes deux plus petites que $\frac{3}{8}h^2$ ou toutes deux plus grandes ; leur somme étant égale à $\frac{h^2}{2}$, elles ne peuvent pas être toutes deux plus grandes ; donc elles sont toutes deux plus petites et par conséquent admissibles. Dans ce cas, il semble qu'il y ait quatre systèmes de solutions, mais on n'en a en réalité que deux :

$$x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2-\sqrt{25h^4-48a^4}}{3}}+\frac{1}{4}\sqrt{h^2+\sqrt{25h^4-48a^4}},$$

$$y=\frac{1}{4}\sqrt{5h^2-\sqrt{25h^4-48a^4}}-\frac{1}{4}\sqrt{h^2+\sqrt{25h^4-48a^4}};$$

$$x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2+\sqrt{25h^4-48a^4}}{3}}+\frac{1}{4}\sqrt{h^2-\sqrt{25h^4-48a^4}},$$

$$y=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2+\sqrt{25h^4-48a^4}}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{h^2-\sqrt{25h^4-48a^4}}.$$

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{25}{48}$, on a une solution double pour $x-y$; et enfin, quand $\frac{a^4}{h^4}$ est plus grand que $\frac{25}{48}$, on n'a pas de solution.

Ces divers résultats peuvent se résumer dans le Tableau suivant :

Variations de $\frac{a^4}{h^4}$.	*Nombres de solutions.*
$\frac{a^4}{h^4} < \frac{1}{2}$	0 sol.
$\frac{a^4}{h^4} = \frac{1}{2}$	1 sol. : cylindre.
$\frac{1}{2} < \frac{a^4}{h^4} < \frac{99}{192}$	1 sol.
$\frac{a^4}{h^4} = \frac{99}{192}$	2 sol. : 1 cône et 1 tronc de cône.
$\frac{99}{192} < \frac{a^4}{h^4} < \frac{25}{48}$	2 sol.
$\frac{a^4}{h^4} > \frac{25}{48}$	0 sol.

On voit, comme détail de la discussion, que $\frac{a^4}{h^4}$ a un maximum $\frac{25}{48}$; on peut se proposer de le trouver directement.

Supposons h^4 constant; nous cherchons le maximum de a^4 ou, d'après l'équation (2), de

$$(x+y)^2[h^2+(x-y)]^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(x^2+y^2+xy)+xy][h^2+(x^2+y^2+xy)-3xy] \\ &\qquad = \left(\frac{3}{8}h^2+xy\right)\left(h^2+\frac{3}{8}h^2-3xy\right). \end{aligned} \right.$$

Ce dernier produit est égal à

$$\left(\frac{3}{8}h^2+xy\right)\left(\frac{11}{8}h^2-3xy\right),$$

ou, en développant, à

$$\frac{33}{64}h^4-\frac{9}{8}h^2xy+\frac{11}{8}h^2xy-3x^2y^2.$$

Nous sommes donc ramenés finalement à trouver le

maximum de

$$2h^2xy - 24x^2y^2 = xy(h^2 - 12xy),$$

ou de $12xy(h^2 - 12xy)$, c'est-à-dire le maximum du produit de deux quantités dont la somme est constante; ce maximum a lieu quand les facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand xy est égal à $\frac{h^2}{24}$; et alors a^4 est égal (10) à

$$\left(\frac{3}{8}h^2 + \frac{h^2}{24}\right)\left(h^2 + \frac{3}{8}h^2 - \frac{3h^2}{2}\right)$$

ou bien à

$$\frac{10h^2}{24} \times \frac{30h^2}{24},$$

ou, enfin, à $\frac{25h^2}{48}$; ce que nous avions déjà trouvé par une autre méthode.

Seconde méthode. — Au lieu de prendre pour inconnues la somme et la différence des inconnues x, y, on aurait pu prendre xy et $x+y$.

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$(x+y)^2[h^2 + (x+y)^2 - 4xy] = a^4,$$

d'où, en tenant compte de l'équation et de la relation

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4},$$

$$(x+y)^2\left[h^2 + (x+y)^2 - 4(x+y)^2 + \frac{3}{2}h^2\right] = a^4,$$

$$(x+y)^2[2h^2 - 6(x+y)^2 + 3h^2] = a^4,$$

$$6(x+y)^4 - 5h^2(x+y)^2 + 2a^4 = 0,$$

$$x+y = \sqrt{\frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12}},$$

$$xy = \frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12} - \frac{3}{8}h^2,$$

$$= \frac{h^2 + 2\sqrt{25h^4 - 48a^4}}{24};$$

x et y seront, par conséquent, les racines d'une équation du second degré

$$X^2 - X\sqrt{\frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12}} + \frac{h^2 + 2\sqrt{25h^4 - 48a^4}}{24} = 0.$$

Note. Solutions analogues de MM. Moret-Blanc et Robaglia.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878. — PHILOSOPHIE.

SOLUTION DE M. LEINCHUGEL,

Étudiant en Mathématiques.

On coupe une pyramide triangulaire donnée SABC *par un plan parallèle à la base; ce plan rencontre les arêtes latérales* SA, SB, SC *respectivement en* A′, B′, C′. *On mène ensuite les plans* AB′C′, BC′A′, CA′B′; *soit* P *leur point commun : déterminer le lieu décrit par le point* P *lorsque le plan* A′B′C′ *se déplace en demeurant parallèle à* ABC.

Soit M le point de rencontre des diagonales BC′, CB′ du trapèze BCB′C′; la droite A′M sera, évidemment, l'intersection des plans BC′A′, CB′A′. Or, le point M se trouve, comme on sait, sur la médiane Sα du triangle SBC; donc la droite A′M, et par suite le point P, appartient au plan SAα. On démontrerait de même que ce point appartient aux plans SBβ, SCγ, en désignant par β, γ les milieux des côtés AC, AB. Par conséquent, le lieu du point P est la droite menée du sommet S de la pyramide au centre de gravité de sa base ABC.

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc, Lez, Robaglia, Lannes, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée de Tarbes.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878. — QUESTIONS PROPOSÉES POUR LES CLASSES DE SECONDE ET DE TROISIÈME

(voir 2e série, t. XVIII, p. 233 et 234);

SOLUTIONS DE M. ROBAGLIA.

Seconde.

On donne sur une circonférence deux points A, B *diamétralement opposés; on prend sur cette circonférence un point quelconque* C, *et l'on porte sur la droite* AC, *de part et d'autre du point* C, *des longneurs égales* CD, CD', *telles que le rapport de chacune à la longueur* CB *soit égal à un rapport donné. On fait mouvoir le point* C *sur la circonférence, et l'on demande :*

1° *Les lieux des points* D, D'; 2° *les lieux des points de concours des hauteurs du triangle* ABD *et du point de concours des hauteurs du triangle* ABD'; 3° *le lieu du centre du cercle inscrit au triangle* BDD'; 4° *les lieux des centres des cercles exinscrits au même triangle* BDD' (*).

1° Dans les triangles rectangles égaux BCD, BCD', le rapport des côtés CD et CD' au côté CB étant donné, les angles égaux CDB, CD'B sont connus, et il en est de même des angles ADB, AD'B égaux ou supplémentaires. Donc les lieux des points D, D' sont deux cercles déterminés, égaux, passant par les points A, B, et symétriques par rapport à la droite AB.

2° Si H et H' sont les points de concours des hauteurs

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

des triangles ABD, ABD′; il est facile de voir que les angles AHB, AH′B sont respectivement les suppléments des angles constants ADB, AD′B; donc les lieux des points H, H′ sont ceux des points D′, D.

3° Soit M le centre du cercle inscrit dans le triangle BDD′; les bissectrices DM, D′M des angles BDD′, BD′D rencontreront la perpendiculaire élevée au milieu de AB en des points fixes E, E′, symétriques par rapport à AB (*), et le lieu du point M sera le cercle circonscrit au triangle BEE′.

4° De même, en nommant M′ le centre du cercle exinscrit tangent à DD′ et aux prolongements des côtés BD, BD′, les droites DM′, D′M′ rencontreront la perpendiculaire élevée au milieu de AB en deux points fixes F, F′, symétriques par rapport à AB, et le lieu du point M′ sera la circonférence circonscrite au triangle BFF′.

Enfin, on verra encore sans difficulté que les lieux géométriques des centres des deux autres cercles exinscrits au triangle BDD′ sont les circonférences circonscrites aux triangles BFE′, BEF′.

Note.—Autres solutions de MM. Lez; Moret-Blanc; Leinchugel; Lannes, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée de Tarbes.

Troisième.

Étant donnés dans un plan un cercle O, *un point* A *sur la circonférence de ce cercle et une droite quel-*

(*) Cette perpendiculaire contient les centres des deux circonférences, lieux géométriques de D et D′; elle coupe la première de ces circonférences en des points E, F, milieux des arcs AEB, AFB, et la seconde en des points E′, F′ milieux des arcs AE′B, AF′B. La droite DE est la bissectrice de l'angle BDD′, et DF la bissectrice de l'angle adjacent à BDD′. De même, les droites D′E′, D′F′ divisent en parties égales l'angle BD′D et l'angle adjacent à BD′D. Le point M, centre du cercle inscrit dans le triangle BDD′, est commun aux trois droites DE, D′E′, BC.

(*Note du Rédacteur*).

conque D, *trouver sur cette droite un point tel que, en menant de ce point les deux tangentes au cercle* O *et joignant les points de contact au point* A, *les lignes de jonction fassent entre elles un angle donné* V.

En supposant le problème résolu, on reconnaît facilement que l'angle des tangentes est le supplément du double de l'angle donné V, de sorte que le point cherché se trouve à l'intersection de la droite D et de la circonférence de cercle lieu du sommet d'un angle égal à $180° - 2V$, circonscrit au cercle O. Cette circonférence a, comme on sait, pour centre le point O et pour rayon la distance du point O au point d'intersection des tangentes menées au cercle donné par les extrémités des côtés de l'angle V inscrit dans le cercle.

Il y a donc généralement deux solutions; il n'y en aura qu'une si cette circonférence est tangente à la droite D, et le problème n'admettra aucune solution si la circonférence ne rencontre pas la droite.

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Lez; Leinchugel.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1879);

Compositions de la première série. Admissibilité.

Mathématiques.

I. Comment déduit-on du théorème de Sturm les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation algébrique de degré donné?

II. Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\omega - 3\cos\omega}.$$

COMPOSITIONS DU SECOND DEGRÉ.

Mathématiques.

On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

et un point M sur cette conique; par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point M on fait passer un cercle : prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes.

Si autour du point O on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points : prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment OM et passant par le milieu de ce segment.

Par le point O on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point O, trois autres droites normales à la conique K.

1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a $A=1$ et $B=-1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.

2° Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.

Observation. — Le pied de la normale est le point de la courbe d'où part la normale.

Calcul logarithmique (résolution d'un triangle).

On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a=7953^{m},75,\quad b=5102^{m},40,\quad c=10805^{m},10.$$

Trouver les trois angles et la surface, les angles au centième de seconde, la surface au mètre carré.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Histoire de l'École Centrale des Arts et Manufactures depuis sa fondation jusqu'à ce jour; par *Ch. de Comberousse,* ingénieur civil, professeur de Mécanique à l'École Centrale, ancien élève et membre du Conseil de l'École. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, quai des Augustins, 55 (1879). Prix : 12 fr.

2. Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXVI (1878-79).
Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado; del Socio *Felice Casorati.* Roma, coi tipi del Salviucci (1879).

3. Sul centro delle forze nel piano. Ricerche del S. C. prof. *Giuseppe Bardelli,* lette nell' adunanza del 5 giugno 1879 al Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

4. Dimostrazione del quinto postulato di Euclide. Nota del prof. *Vincenzo de Rossi Re.* Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via Lata, nº 3 (1879).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1302

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 527);

PAR M. MORET-BLANC.

Dans une conique à centre, inscrire le quadrilatère maximum ayant pour un de ses côtés un diamètre donné, et pour côté opposé une corde parallèle à une droite donnée. (F. GABRIEL-MARIE.)

Si la conique était une hyperbole, il est évident que la surface du quadrilatère croîtrait indéfiniment avec les distances de la corde aux deux extrémités du diamètre donné. La conique devant être une ellipse, qui est la projection d'un cercle, on est ramené à résoudre le problème dans le cas du cercle.

Ayant décrit un cercle sur le grand axe de l'ellipse donnée comme diamètre, déterminons les diamètres du cercle qui ont pour projections le diamètre donné de l'ellipse et celui qui est parallèle à la direction donnée. Soient AB le premier, CD une corde du cercle parallèle au second et α leur angle.

Abaissons AE, BF et OG perpendiculaires sur CD, et soit $OG = z$.

L'aire S du quadrilatère ABDC est égale à celle du trapèze ABFE diminuée de celles des deux triangles ACE et BDF. Or, la base de chacun de ces triangles est égale à

$$EG - CG = a\cos\alpha - \sqrt{a^2 - z^2},$$

la demi-somme de leurs hauteurs est z, et la somme de leurs surfaces est

$$\left(a\cos\alpha - \sqrt{a^2 - z^2}\right)z;$$

on a donc

$$S = 2az\cos\alpha - (a\cos\alpha - \sqrt{a^2-z^2})z = az\cos\alpha + z\sqrt{a^2-z^2}.$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à z, pour avoir la valeur qui convient au maximum, il vient

$$a\cos\alpha - \frac{a^2-2z^2}{\sqrt{a^2-z^2}} = 0,$$

$$a^2\cos^2\alpha(a^2-z^2) = (2z^2-a^2)^2,$$

et, en développant et ordonnant,

$$4z^4 - (4a^2 - a^2\cos^2\alpha)z^2 + a^4\sin^2\alpha = 0.$$

Si l'on pose $z^2 = au$, il vient, en divisant par a^2,

$$4u^2 - (4a - a\cos^2\alpha)u + a^2\sin^2\alpha = 0.$$

On est ramené à construire deux lignes, connaissant leur somme $a - \frac{a}{4}\cos^2\alpha$ et leur produit $\frac{a^2\sin^2\alpha}{4}$; on aura ensuite z par une moyenne proportionnelle entre a et u.

Le quadrilatère ABCD étant construit dans le cercle, on le projettera sur l'ellipse.

Question 1311

(voir 2e série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. MARCELLO ROCCHETTI,

Professeur au lycée R. Campanella, à Reggio (Calabria).

Quatre nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positifs ou négatifs étant donnés, soit fait, pour abréger,

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$Q = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha(\beta+\gamma+\delta),$$
$$R = \gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 - \beta(\gamma+\delta+\alpha),$$
$$S = \delta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma(\delta+\alpha+\beta).$$

On peut démontrer, par un calcul direct, que le nombre

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

est le produit de deux facteurs, dont l'un s'exprime par une somme de quatre carrés et l'autre par une somme de trois carrés. (S. Realis.)

Posons

(1) $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, et $B = \alpha + \beta + \gamma + \delta$,

il vient

$$P = A - B\delta, \quad Q = A - B\alpha, \quad R = A - B\beta, \quad S = A - B\gamma;$$

d'où

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = A(4A - B^2),$$

et, en remplaçant A et B par leurs valeurs (1),

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(\alpha + \gamma - \beta - \delta)^2 + (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 + (\alpha + \delta - \beta - \gamma)^2].$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Droz; Ferdinando Pisani; Sondat; Louis Cauret.

Question 1314

(voir 2e série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Si, dans un triangle ABC, *on a* $A \pm B = 90^\circ$, *alors*

$$2.c^{\pm 2} = (a + b)^{\pm 2} + (a - b)^{\pm 2},$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

On demande une démonstration simple de cette extension du théorème de Pythagore.

(Donald Mc. Alister.)

1° Lorsque $A + B = 90^\circ$, $c^2 = a^2 + b^2$;

$$2c^2 = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

2° Soit $A - B = 90^\circ$, ou $A = 90^\circ + B$. Au sommet de l'angle obtus A, élevons au côté AB une perpendiculaire AD qui rencontrera le côté BC, en un point D si-

tué entre B et C. On a, par hypothèse, $A = 90^\circ + B$, et, par construction, $A = 90^\circ + DAC$; donc $DAC = B$. Il s'ensuit que les triangles DAC, BAC sont semblables; leur similitude donne

$$AD = \frac{bc}{a}, \quad DC = \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$BD = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Dans le triangle rectangle BAD,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2;$$

donc

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} = \frac{b^2c^2}{a^2} + c^2 = \frac{(a^2 + b^2)\,c^2}{a^2},$$

$$(a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)\,c^2.$$

De cette égalité, on tire successivement

$$2(a^2 - b^2)^2 = [(a - b)^2 + (a + b)^2]\,c^2,$$

$$\frac{2}{c^2} = \frac{(a - b)^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{(a + b)^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

$$\frac{2}{c^2} = \frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(a - b)^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même proposition a été démontrée au moyen des formules de la Trigonométrie, par MM. de Virieu et Rocchetti.

M. N. Artemieff, à Saint-Pétersbourg, en a donné deux démonstrations, l'une géométrique, l'autre par la Trigonométrie.

M. O. Save, de l'Athénée de Mons, en a donné une démonstration géométrique.

Question 1315

(voir 2e série, t. XVIII, p. 336);

PAR M. LOUIS CAURET.

Étant donnés un triangle inscrit ABC *et le diamètre* DE *perpendiculaire à* BC, *si du point* C *comme centre,*

avec la moitié de BC *pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre* CE *en* N, *que par* N *on mène* NM *parallèle à* CA, *et coupant* AE *en* M, *il s'agit de démontrer que*

$$AM = \frac{AC + AB}{2} \ (*).$$

Ce théorème sert à déterminer le grand axe d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

(A. Cambier.)

Dans le triangle AEC, on a

$$\frac{AM}{CN} = \frac{AE}{CE};$$

ou, puisque $CN = \frac{BC}{2}$,

$$(1) \qquad 2.AM.CE = AE.BC.$$

Le quadrilatère ABEC étant inscrit, on a aussi

$$AB.CE + AC.BE = AE.BC;$$

et, comme BE = CE,

$$(2) \qquad (AB + AC)CE = AE.BC.$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$2AM.CE = (AB + AC)CE;$$

d'où

$$AM = \frac{AB + AC}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La somme et la différence des demi-axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués, étant représentées par deux côtés AB, AC d'un triangle inscrit dans

(*) Il est supposé que les deux points E, A sont situés de différents côtés de CB; autrement, la droite AM ne serait pas égale à la demi-somme des côtés AB, AC du triangle ABC : elle serait égale à leur demi-différence. (*Note du Rédacteur.*)

une circonférence que l'on sait décrire, on aura, par ce qui précède,

$$AM = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = a.$$

Remarque.—Si l'on suppose $AB = a+b$, ou $AB > AC$, on aura le demi petit axe de l'ellipse en retranchant AM de AB. De A comme centre avec AM pour rayon, on décrira une circonférence rencontrant AB en P; le segment BP sera égal à b.

Note. — Solutions analogues de MM. Lez, Ferdinando Pisani et Robaglia.

Question 1317

(voir 2e série, t. XVIII, p. 336);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

« *Démontrer que le polynôme*

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1$$

est divisible par $(x-1)^4$.

Trouver l'expression générale du quotient. »

(GENTY.)

Ce polynôme et ses trois premières dérivées se réduisent à zéro par $x = 1$; il est donc divisible par $(x-1)^4$. On peut le débarrasser immédiatement du facteur $(x-1)^2$, en le mettant sous la forme

$$(x^n-1)^2 - n^2 x^{n-1}(x-1)^2.$$

La division du polynôme par $(x-1)^2$ le réduit à

$$(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)^2 - n^2 x^{n-1}.$$

En divisant de nouveau par $(x-1)^2$, on a d'abord le quotient

$$Q = \left(\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{x-1}\right)^2 - \frac{n^2 x^{n-1}}{(x-1)^2}.$$

Mais

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{x-1}$$
$$=[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+n-1]+\frac{n}{x-1},$$

et

$$\frac{x^{n-1}}{(x-1)^2}=\left(\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}\right)+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Donc, en posant

$$x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+n-1=\alpha,$$

on aura

$$Q=\left(\alpha+\frac{n}{x-1}\right)^2-n^2\left(\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}\right)-\frac{n^2}{(x-1)^2}$$
$$=\alpha^2+\frac{2n\alpha}{x-1}-n^2\left(\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}\right).$$

Or,

$$\frac{\alpha}{x-1}=\left[x^{n-3}+3x^{n-4}+6x^{n-5}+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]+\frac{n(n-1)}{2(x-1)},$$

et

$$\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}$$
$$=[x^{n-3}+2x^{n-4}+\ldots+(n-3)x+n-2]+\frac{n-1}{x-1};$$

il en résulte

$$Q=[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+n-1]^2$$
$$+2n\left[x^{n-3}+3x^{n-4}+6x^{n-5}+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$
$$-n^2[x^{n-3}+2x^{n-4}+\ldots+(n-3)x+n-2].$$

Le quotient est composé du carré d'un polynôme de degré $(n-2)$; d'un second polynôme du degré $(n-3)$, multiplié par $2n$; et d'un troisième du degré $(n-3)$, multiplié par $(-n^2)$. Les coefficients des termes du pre-

mier et du troisième se composent de la suite naturelle des nombres entiers; les coefficients des termes du second sont les nombres triangulaires consécutifs.

Note. — La même question a été résolue par MM. de Virieu et Marcello Rocchetti.

QUESTIONS.

1325. On prend la moyenne arithmétique p_1 et la moyenne harmonique q_1 de deux nombres donnés p et q;

$$p_1 = \frac{p+q}{2}, \quad q_1 = \frac{2pq}{p+q}.$$

On opère de même sur p_1, q_1; puis sur p_2 et q_2, et ainsi de suite, de telle manière que

$$p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}, \quad q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n + q_n}.$$

Trouver l'expression générale de p_n en fonction de p et q; montrer qu'on a

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > \sqrt{pq}, \quad \text{et} \quad q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < \sqrt{pq}.$$

(E. Lucas.) (*)

1326. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les côtés, on divise le triangle en trois quadrilatères proportionnels à m, n, p. (Lez.)

1327. On donne les bissectrices α, β des deux angles aigus A, B d'un triangle rectangle ABC; calculer les valeurs des côtés et des angles A, B du triangle. (Discussion. — Nombre des solutions.)

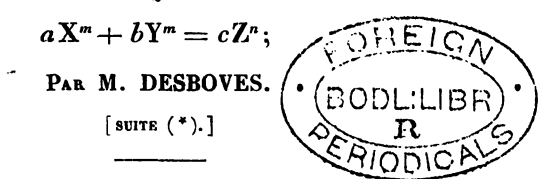
(*) M. Lucas ajoute : « *Il est probable que c'est là la méthode employée par les anciens, dans l'approximation des racines carrées.* »

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n;$$

PAR M. DESBOVES.

[SUITE (*).]



IV. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $aX^4 + bY^4 = cZ^n$, n AYANT LES VALEURS 2, 3, 4, ETC.

14. *Identités relatives à la résolution de l'équation*

(55) $$aX^4 + bY^4 = cZ^2.$$

En égalant à zéro les valeurs de U et V données par les formules (27) et en résolvant les deux équations ainsi obtenues par rapport à x et r, on a

$$x = \frac{-yz}{u}, \quad r = \frac{y(2z^2 - yu)}{u^3}.$$

Si l'on substitue ensuite les valeurs précédentes de x et r dans les expressions de X et Y (27), et dans celle de Z (25), on a

$$X = \frac{2y(z^4 - y^2u^2 + 2yuz^2)}{u^3}, \quad Y = \frac{4yzu(z^2 - yu)}{u^3},$$

$$Z = \frac{4y^2}{u^6}(z^8 + y^4u^4 + 10y^2z^4u^2 - 4y^3z^2u^3 - 12yuz^6),$$

et, par suite, on obtient l'identité

$$(z^4 - y^2u^2 + 2yuz^2)^4 + z^4yu(yu - 2z^2)[2(z^2 - yu)]^4$$
$$= (z^8 + y^4u^4 + 10y^2u^2z^4 - 4z^2y^3u^3 - 12yuz^6)^2.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 398.

Si maintenant on pose

$$z^2 = x_1, \quad yu = -y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} &(y^2 + 2xy - x^2)^4 + yx^2(y + 2x)(2x + 2y)^4 \\ &\quad = (x^4 + y^4 + 10x^2y^2 + 4y^3x + 12yx^3)^2. \end{aligned} \right.$$

De l'identité précédente, on peut déduire plusieurs autres. Si d'abord on y remplace y par $y_1 - x$, et qu'après la substitution on change x^2 en x, puis que l'on efface les accents, on a

$$(57) \quad (y^2 - 2x)^4 + x(y^2 - x)(2y)^4 = (y^4 - 4x^2 + 4xy^2)^2.$$

Changeons maintenant dans l'identité (57) x en $-xy$, et il viendra

$$(58) \quad (y + 2x)^4 - xy^2(x + y) \times 2^4 = (y^2 - 4x^2 - 4xy)^2.$$

Enfin, si dans cette dernière identité on pose

$$x = \frac{(x_1 - y_1)^2}{2}, \quad y = 2x_1y_1,$$

puis que l'on efface les accents, on a

$$(59) \quad (x^2 + y^2)^4 - x^2y^2(x^2 - y^2)^2 \times 2^4 = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2)^2.$$

Les identités (56), (57), (58) et (59) montrent que l'équation (55) peut être résolue, lorsque, a et c étant égaux à l'unité, b est de l'une des formes $yx^2(y + 2x)$, $y(y + 2x^2)$, $x(y^2 - x)$, $-xy^2(x + y)$, $-x(x + y^2)$, $-x^2y^2(x^2 - y^2)^2$.

La dernière forme se rapporte au cas des nombres congruents par rapport à deux carrés. On voit, en effet, que l'identité (59) se décompose en ces deux autres

$$(60) \quad (x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 + 2xy)^2,$$

$$(61) \quad (x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 - 2xy)^2,$$

et qu'ainsi on peut trouver des valeurs de X, Y, U et V satisfaisant en même temps aux deux équations

$$X^2 + aY^2 = U^2, \quad X^2 - aY^2 = V^2,$$

lorsque a est de la forme $xy\,(x^2 - y^2)$. On prouve d'ailleurs aisément que la condition est nécessaire.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème VII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours trouver une infinité de valeurs de c, telles que l'équation* (55) *puisse être résolue en nombres entiers.*

En faisant d'abord dans les formules (27) $z = 0$, $u = 0$, on a

$$X = x^2, \quad Y = 2xy, \quad U = y^2, \quad V = 0.$$

Si l'on remplace ensuite dans les formules (23) X, x, ... respectivement par X′, X, ..., et que l'on y fasse $z_1 = 1$, $u_1 = 0$, on a

$$X' = Xx_1 + rU + rVy_1, \quad Y' = Xy_1 + Yx_1 + rV,$$
$$U' = X + Ux_1 + Yy_1, \quad V' = Vx_1 + Y + Uy_1;$$

et, en mettant dans ces dernières formules les expressions de X, Y, U, V que donnent les précédentes, on a

$$X' = x^2x_1 + ry^2, \quad Y' = 2xyx_1 + x^2y_1,$$
$$U' = y^2x_1 + 2xyy_1 + x^2, \quad V' = y^2y_1 + 2xy.$$

Si ensuite on égale à zéro U′ et V′, et que l'on résolve, par rapport à x_1 et y_1, les équations ainsi obtenues, on a

$$x_1 = \frac{3x^2}{y^2}, \quad y_1 = \frac{-2x}{y};$$

et, en substituant ces valeurs de x_1, y_1 dans X′, Y′ et dans Z_1 [Z_1 désigne le résultat de la substitution de x_1,

y_1, z_1 à x, y, z dans l'expression (25) de Z], on obtient

$$X' = \frac{3x^4 + ry^4}{y^2}, \quad Y' = \frac{4x^3y}{y^2}, \quad Z_1 = \frac{81x^8 + 14rx^4y^4 + r^2y^8}{y^8}.$$

Multipliant maintenant par Z_1 les deux membres de l'équation (26), où l'on remplace X, Y, U, V respectivement par X', Y', o, o, les nouvelles valeurs de X, Y, Z, c'est-à-dire X', Y', Z_1, étant données par les formules précédentes, après avoir remplacé r par $\frac{-b}{a}$, on aura l'identité

$$(62) \left\{ \begin{array}{l} a(3ax^4 - by^4)^4 + b(4ax^3y)^4 \\ \quad = (81a^3x^8 - 14a^2bx^4y^4 + ab^2y^8)(ax^4 + by^4)^2. \end{array} \right.$$

Le théorème VII se trouve ainsi démontré.

15. *Recherche des formules qui donnent une infinité de solutions de l'équation* (55) *lorsque l'on connaît une première solution, mais seulement dans le cas où a et c sont égaux à* 1.

Si l'on fait $a = 0$ et que l'on change b en $-b$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) du n° 4, on a

$$\begin{gathered} X_2^2 - bY_2^2 = Z^4, \\ X_2 = x^4 + 6bx^2y^2 + b^2y^4, \\ Y^2 = 4xy(x^2 + by^2), \quad Z = x^2 - by^2; \end{gathered}$$

et, par suite, il vient

$$(x^4 + 6bx^2y^2 + b^2y^4)^2 - 16bx^2y^2(x^2 + by^2)^2 = (x^2 - by^2)^4.$$

Changeons maintenant dans l'identité précédente x, y en x^2, y^2, puis supposons que (x, y, z) soit une solution de l'équation

$$(63) \qquad X^4 + bY^4 = Z^2;$$

alors, de l'identité précédente, on déduit

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

De là il suit que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (63), on en aura une seconde (X, Y, Z) par les formules

$$(64)\quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + 4bx^4y^4.$$

Les formules précédentes sont dues à Lagrange, qui les démontre, moins simplement que nous l'avons fait, dans son Mémoire déjà plusieurs fois cité (*) ; mais son analyse a l'avantage de pouvoir s'étendre sans modification au cas où l'équation (63) contient en plus le terme dx^2y^2. Il suffit, en effet, de prendre pour point de départ, au lieu de l'identité employée par Lagrange,

$$(x^2 - by^2)^2 + b(2xy)^2 = (x^2 + by^2)^2,$$

l'identité un peu plus générale (6). On a alors les formules

$$(65)\quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + (4b - d^2)x^4y^4.$$

Remarque. — On peut encore donner plusieurs autres démonstrations des formules (64). On les démontre d'abord très-simplement par la méthode de Fermat, et aussi par un moyen que j'ai indiqué dans les *Nouvelles Annales* (**) : voici encore une nouvelle manière de les démontrer.

Remplaçant dans les formules (25) et (27) z par t et r par $-b$, puis résolvant par rapport à t et u les équations que l'on obtient en égalant à zéro U et V, on a

$$u = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 + by^4}}{-by}, \quad t = -\frac{xu}{y}.$$

(*) Voyez le t. IV des *Œuvres de Lagrange*, p. 395. — Édition SERRET.

(**) *Voir* la question 1324, numéro d'août 1879.

Or, si l'on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation (63), il vient

$$u = -\frac{x^2 + z}{by}, \quad t = \frac{x(x^2 + z)}{by^2};$$

et, en substituant ces valeurs de u et t dans les expressions de X, Y, Z données par les formules (25) et (27), on a

$$X = \frac{2(x^2 + z)(x^4 - by^4)}{by^4}, \quad Y = \frac{4(x^2 + z)xyz}{by^4},$$
$$Z = \frac{4(x^2 + z)^2(z^4 + 4bx^4y^4)}{b^2y^8},$$

et, par suite, l'identité

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

La démonstration s'achève alors comme la première.

16. *Formules nouvelles qui permettent, connaissant une solution* (x, y, z) *de l'équation générale* (55), *d'en trouver une autre* (X, Y, Z).

Changeons d'abord, dans les formules (23) du n° 6, $X, x, y, z, u, \ldots$, en $X_1, X, Y, U, V, \ldots$ et faisons-y $z_1 = u_1 = 0, x_1 = y_1 = 1$: on a

$$X_1 = X + rV, \quad Y_1 = X + Y, \quad U_1 = Y + U, \quad V_1 = U + V.$$

Si ensuite, dans les formules (27), on fait $x = 0, y = ru$, on a

$$X = r(z^2 + 2ru^2), \quad Y = 2rzu,$$
$$U = (r^2 + r)u^2, \quad V = 2rzu,$$

et, par suite,

$$X_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2rzu), \quad Y_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2zu),$$
$$U_1 = ru[(r + 1)u + 2z], \quad V_1 = ru[(r + 1)u + 2z].$$

En posant maintenant

$$z = -\frac{(r+1)u}{2},$$

on a

$$X_1 = \frac{ru^2}{4}(-3r^2+6r+1), \quad Y_1 = \frac{ru^2}{4}(r^2+6r-3),$$
$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0.$$

D'ailleurs Z_1 est égal à $1-r$, et, en faisant dans l'expression de Z (25)

$$x = 0, \quad y = ru, \quad z = -\frac{r+1}{2}u,$$

on obtient

$$Z = \frac{r^2u^4}{16}(r^4 - 28r^3 + 6r^2 - 28r + 1);$$

on a donc l'identité

$$\begin{aligned}(3r^2 - 6r - 1)^4 - r(3 - 6r - r^2)^4 \\ = (1-r)(r^4 - 28r^3 + 6r^2 - 28r + 1)^2,\end{aligned}$$

ou, en remplaçant r par $\frac{-y}{x}$,

$$(66) \left\{\begin{aligned} &x(3y^2 + 6xy - x^2)^4 + y(3x^2 + 6xy - y^2)^4 \\ &\quad = (x+y)(x^4 + y^4 + 28xy^3 + 28yx^3 + 6x^2y^2)^2.\end{aligned}\right.$$

L'identité précédente peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}x[3(x+y)^2 - 4x^2]^4 + y[3(x+y)^2 - 4y^2]^4 \\ = (x+y)[4(x+y)^4 - 3(x-y)^4]^2,\end{aligned}$$

et, en y changeant x, y respectivement en ax^4, by^4, on a

$$\begin{aligned}a\{x[3(ax^4+by^4)^2 - 4a^2x^8]\}^4 + b\{y[3(ax^4+by^4)^2 - 4b^2y^8]\}^4 \\ = (ax^4+by^4)[4(ax^4+by^4)^4 - 3(ax^4-by^4)^4]^2.\end{aligned}$$

Si maintenant on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation proposée, on déduit de l'identité précé-

dente l'équation

$$a[x(3c^2z^4-4a^2x^8)]^4+b[y(3c^2z^4-4b^2y^8)]^4 \\ = c\{z[4c^4z^8-3(ax^4-by^4)^4]\},$$

et, par suite, on aura une nouvelle solution (X, Y, Z) par les formules

$$(67)\quad \begin{cases} X = x(3c^2z^4-4a^2x^8), \quad Y = y(3c^2z^4-4b^2y^8), \\ Z = z[4c^4z^8-3(ax^4-by^4)^4]. \text{ (1)} \end{cases}$$

17. *Résolution de l'équation*

$$(68)\qquad aX^4+bY^4=cZ^3.$$

Je me contenterai de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation* (68) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Faisant d'abord $z=0$, $u=0$ dans les formules (29), on a

$$X_1=x^3, \quad Y_1=3x^2y, \quad U_1=3xy^2, \quad V_1=y^3.$$

Si ensuite on change dans les formules (23) $X, x, \ldots$ en $X', X, \ldots$; qu'on y fasse $u_1=0$, $z=1$, puis qu'on y remplace X_1, Y_1, U_1, V_1 par les expressions précédentes,

---

(1) J'étais déjà arrivé à ce résultat nouveau par une autre méthode (*Comptes rendus* du 7 octobre 1878); cette même méthode donne aussi les formules suivantes, qui s'appliquent au cas où l'équation biquadratique contient en plus le terme dx^2y^2 :

$$X = x[4bcy^4z^2-(ax^4-by^4)^2], \quad Y = y[4acx^4z^2-(ax^4-by^4)^2],$$
$$Z = z\{f[2x^2y^2(ax^4-by^4)]^2-(c^2z^4-fx^4y^4)\}^2.$$

(Dans la dernière formule, on a représenté par f la quantité d^2-4ab.)

on a

$$(69)\quad \begin{cases} X' = x^3x_1 + ry^3y_1 + 3rxy^2, \\ Y' = 3xy^2y_1 + x^3y_1 + ry^3, \\ U' = 3xy^2x_1 + 3x^2yy_1 + x^3, \\ V' = y^3x_1 + 3xy^2y_1 + 3x^2y; \end{cases}$$

et si l'on résout par rapport à x_1, y_1 les équations que l'on obtient en égalant U' et V' à zéro, il vient

$$x_1 = \frac{x^2}{y^2}, \quad y_1 = -\frac{4x}{3y}.$$

Si maintenant on substitue ces valeurs dans les expressions (69) de X', Y' et aussi dans Z_1 où l'on a d'abord fait $u = 0$, $v = 0$ [(Z_1 est, comme à l'ordinaire, le résultat de la substitution de x_1, y_1, z_1 à x, y, z dans l'expression de Z (25)], on a

$$X' = \frac{x(3x^4 + 5ry^4)}{3y^2},$$

$$Y' = \frac{y(5x^4 + 3ry^4)}{3y^2},$$

$$Z = \frac{81x^8 + 158rx^4y^4 + 81r^2y^8}{81y^8}.$$

Alors, en procédant comme on l'a fait pour obtenir l'identité (62), on a, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, l'identité

$$(69)\quad \begin{cases} a[x(3ax^4 - 5by^4)]^4 + b[y(5ax^4 - 3by^4)]^4 \\ \quad = (81a^2x^8 - 158abx^4y^4 + 81b^2y^8)(ax^4 + by^4)^3, \end{cases}$$

qui démontre le théorème énoncé.

18. *Résolution de l'équation*

$$(70)\quad aX^4 + bY^4 = cZ^4.$$

Si l'on part de l'identité évidente

$$(71)\quad (x+2y)^4-(x-2y)^4=xy(x^2+4y^2)\times 2^4$$

et qu'on y change x, y en x^4, y^4, on a

$$(72)\quad (x^4+2y^4)-(x^4-2y^4)^4=(x^8+4y^8)\times(2xy)^4.$$

On peut encore obtenir une troisième identité de la manière suivante.

En faisant $a=0$ et $b=1$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) et (5), on a

$$(x^4-6x^2y^2+y^4)^2+[4xy(x^2-y^2)]^2=(x^2+y^2)^4;$$

et, si l'on multiplie par 2 les deux membres de l'identité précédente, puis que l'on y remplace une expression de la forme $2(s^2+t^2)$ par $(s+t)^2+(s+t)^2$, il vient

$$[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^2+[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^2 \\ =[2(x^2+y^2)]^4.$$

On vérifie d'ailleurs facilement que l'on a

$$[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^2-[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^2 \\ =16xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2];$$

et en multipliant, membre à membre, les deux dernières identités, on obtient

$$(73)\left\{\begin{aligned} &[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^4 \\ &\quad -[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^4 \\ &\quad =2xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2](2x^2+2y^2)^5.\end{aligned}\right.$$

Remarque. — On peut encore obtenir l'identité précédente en partant de l'identité (59), dont on met le second membre sous la forme $[(y^2+2x^2)^2-8x^2]^2$, et il ne reste plus qu'à remplacer, au moyen d'un changement de variables, la quantité entre crochets par un carré; ce qui n'offre aucune difficulté.

Les identités (71), (72) et (73) montrent que l'équation (70) peut être résolue en nombres entiers lorsque, a et b étant respectivement égaux à 1 et -1, c a l'une des formes

$$xy(x^2+4y^2),\quad x^4+4y^8,\quad 2xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2].$$

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Lorsque a et b sont des nombres entiers quelconques, on peut trouver une infinité de valeurs de c telles, que l'équation (70) puisse être résolue en nombres entiers.*

Prenons l'identité (30) du n° 6. Les valeurs de X_2, Y_2, U_2, V_2 n'ont pas été calculées; mais, si l'on suppose z et u nuls, on obtient aisément, par la méthode ordinaire,

$$X_2=x^4+ry^4,\quad Y_2=4x^3y,\quad U_2=6x^2y^2,\quad V_2=4xy^3.$$

Si l'on suppose maintenant que l'on multiplie par Z_1 les deux membres de l'équation (30), Z_1 ayant la signification connue, ainsi que X', Y', U, V', on a, en faisant $u_1=0$, $z_1=1$,

$$\begin{aligned}
X'&=(x^4+ry^4)x_1+4rxy^3y_1+6rx^2y,\\
Y'&=4x^3yx_1+(x^4+ry^4)y_1+4rxy^3,\\
U'&=6x^2y^2x_1+4x^3yy_1+x^4+ry^4,\\
V'&=4xy^3x_1+6x^2y^2y_1+4x^3y,\\
Z_1&=(x_1^2-r)^2-ry_1^2(y_1^2-4x_1);
\end{aligned}$$

puis, si l'on résout par rapport à x_1, y_1 les équations $U'=0$, $V'=0$, on a les valeurs

$$x_1=\frac{5x^4-3ry^4}{10x^2y^2},\quad y_1=\frac{ry^4-5x^4}{5x^2y^2},$$

que l'on substitue dans Z', Y', U', V', Z_1. On voit alors

que, en remplaçant r par $-\frac{b}{a}$, on peut prendre pour valeurs de X', Y', Z_1, Z satisfaisant à l'identité

$$(74)\qquad aX'^4 + bY'^4 = Z_1 Z^4,$$

$$X' = x(5a^2x^8 - 22abx^4y^4 + 5b^2y^8),$$

$$Y' = 2y(5a^2x^8 - 10abx^4y^4 + b^2y^8),$$

$$Z_1 = 625a^5x^{20} - 3500a^4bx^{16}y^4 + 5350a^3b^2x^{12}y^8 - 860a^2b^3x^8y^{12} - 79ab^4x^4y^{16} + 16b^5y^{20},$$

$$Z = ax^4 + by^4.$$

Le théorème IX est ainsi démontré.

RECHERCHES SUR LES SYSTÈMES POLAIRES (*);

PAR M. JUNG,

Professeur de Statique graphique à l'Institut technique supérieur de Milan.

TRADUCTION PAR UN ABONNÉ.

Dans la théorie des moments d'inertie de plusieurs forces parallèles, dirigées ou non dans le même sens, on rencontre un certain système polaire dont on peut tirer un grand parti pour le développement géo-mécanique de la même théorie, en en déduisant, par un procédé naturel et uniforme, les principales propriétés des coniques de moments nuls et de moments constants, des coniques d'inertie et de la conique centrale, etc., ainsi

(*) Note lue devant l'Institut royal lombard, dans sa séance du 20 février 1879.

que des quadriques analogues quand les forces données ne sont pas toutes contenues dans un même plan.

La considération de ce fait et l'étude de quelques conceptions neuves, développées par l'illustre professeur Cremona dans ses Leçons de Statique graphique, jointes au désir de coopérer, dans la mesure de mes forces, au but élevé que se propose d'atteindre, dans son magnifique Ouvrage *Die graphische Statik* (*), le célèbre professeur Culmann, ont fait naître en moi la pensée de reprendre l'étude des systèmes polaires en général, au point de vue géométrique. Mon but spécial est de séparer et de grouper ensemble toutes les propriétés qui, établies par la méthode synthétique, restent vraies indépendamment de toute considération mécanique, et qui, pour ce motif, pourront s'appliquer avec avantage, non-seulement à la théorie des moments d'inertie, mais aussi à d'autres questions variées et de nature différente.

Ce sont quelques-uns des résultats de ces recherches que j'ai l'honneur de présenter en quelques mots à l'Institut royal; je réserve pour un autre travail un développement plus étendu de la théorie des systèmes polaires et de ses applications. A part les choses énoncées dans les préliminaires et quelques autres indiquées dans le paragraphe suivant, qui sont déjà connues, mais qui sont nécessaires pour l'intelligence du reste, je ne crois pas que l'on soit déjà parvenu par la voie synthétique ou même par la voie analytique aux résultats géométriques que je vais énoncer. C'est pour ce motif que, malgré leur nature élémentaire, ils m'ont paru assez intéressants en eux-mêmes et utiles par leurs conséquences et leurs applications pour que je puisse en faire l'objet de cette

(*) Voir l'intéressante Préface de la seconde édition (Zürich, 1875), notamment aux pages v et VII.

Communication, qui sera, je l'espère, suivie par d'autres sur le même sujet.

I. — Préliminaires.

1. Si deux plans réciproques π, π' sont superposés de manière qu'aux sommets d'un triangle ABC, considérés comme points de l'un d'eux, correspondent les côtés opposés considérés comme droites de l'autre, *les deux plans sont en position involutive et constituent un système polaire* Σ (*) : un point quelconque P de Σ correspond *doublement* à une droite déterminée p du même système Σ (ce qui veut dire que P, considéré comme appartenant à π ou à π', a toujours pour correspondants, dans π' ou dans π, la droite p); la considération des deux systèmes π et π' devient superflue, et les éléments correspondants dans Σ, comme P et p, sont ordinairement nommés (**) *pôle* et *polaire* (nous les désignerons sous les noms de *antipôle* et *antipolaire*). Tout cela est très-connu.

2. On sait aussi que, si un point est situé sur sa propre antipolaire, et, par suite, si une droite renferme son propre antipôle (nous appellerons ces éléments *point uni* et *droite unie*), le système polaire est doué d'une *conique directrice* D (***) qui est, en même temps, le lieu des points unis et l'enveloppe des droites unies, et qui se

---

(*) Chasles, *Aperçu historique*, etc., p. 370. 2ᵉ édition (Paris, 1875).

(**) Voir, par exemple : Staudt, *Geometrie der Lage* (Nurnberg, 1847), § 18, nᵒˢ 234, 235; Reye, *Die Geometrie der Lage* (Hannover, 1868, t. II, p. 59).

(***) *Ordnungscurve* suivant Staudt; *Directrix* suivant Reye; *Kern-Kegelschnitte* suivant Schröter (*Die Theorie der Kegelschnitte*. Leipzig, 1867).

correspond à elle-même, c'est-à-dire qui se confond avec sa propre antipolaire.

3. Quand la directrice D existe, le système polaire (complexe des points de Σ et des droites antipolaires correspondantes) n'est pas autre chose que le système polaire réciproque ordinaire de Poncelet, relatif à la conique fondamentale D (*).

4. Par analogie, on maintient dans le cas général les dénominations et les définitions de droites réciproques, de points réciproques, de triangle conjugué, etc., qui sont très-connues dans la théorie du système spécial formé par les pôles et les polaires, par rapport à une conique fondamentale. Les théorèmes relatifs : 1° *à la projectivité entre une ponctuelle d'antipôles et le faisceau correspondant des antipolaires;* 2° *à l'involution des points réciproques situés sur une même droite,* continuent à être vrais pour un système polaire Σ quelconque. Il en est de même de ceux qui s'en déduisent et qui se rapportent aux courbes correspondantes dans Σ (courbes antipolaires) et, en particulier, aux coniques antipolaires, à leurs centres, etc. (**).

5. Le *centre* d'un système Σ est l'antipôle O de la droite *j* à l'infini; les droites passant par O sont des diamètres. Deux diamètres qui sont des droites réciproques (c'est-à-dire, telles que le point à l'infini de l'un soit l'antipôle de l'autre) sont nommés *conjugués.*

Les diamètres conjugués de Σ forment des couples en

(*) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II, p. 57 et suiv. 2e édition (Paris, 1866); Chasles, *loc. cit.*, p. 228 et suiv.

(**) Voir, par exemple : Cremona, *Éléments de Géométrie projective*, § 20 et 22 (Turin, 1873; Paris, 1875).

involution; les rayons doubles de cette involution, s'ils existent, sont appelés *asymptotes,* les rayons conjugués et orthogonaux sont les *axes* du système polaire (*).

6. Un système polaire est déterminé quand on en donne un triangle conjugué ABC, et comme antipolaire d'un point P, non situé sur le périmètre du triangle, une droite p qui ne passe par aucun de ses sommets. Suivant la position relative de P et de p, par rapport au triangle ABC, le système admet ou n'admet pas de conique directrice (**). Quand la directrice existe, deux des trois côtés de tout triangle conjugué la rencontrent et le troisième ne la rencontre pas.

II. — Classification des systèmes polaires. Propriétés focales.

7. Si O est à distance finie, les diamètres conjugués forment une involution proprement dite et le système Σ a *deux asymptotes* ou *n'en a pas.* Dans le premier cas, le système polaire peut être nommé *hyperbolique,* et dans le second cas *elliptique.* Si O est à l'infini, tous les diamètres sont parallèles entre eux, et il n'y a qu'une seule asymptote (la droite j à l'infini). Ce système peut être nommé *parabolique* [***].

8. *Le système hyperbolique a deux axes,* qui sont les

(*) Voir Schröter, *loc. cit.*, § 58.

(**) Staudt, *Geometrie der Lage*, n° 237; Reye, *loc. cit.*, p. 61.

(***) La classification des systèmes polaires que je propose est différente de celle de Schröter (*loc. cit.*, § 56). J'ai quelques raisons pour la justifier; mais, pour éviter ici une trop longue digression, je me réserve de les exposer dans une autre occasion; je reviendrai sur cet argument et je chercherai à mettre en lumière soit le vrai fondement des deux classifications, soit la nécessité de les accorder pour pouvoir les maintenir toutes les deux.

bissectrices des angles des asymptotes. Si les asymptotes sont rectangulaires, le système hyperbolique est dit *orthogonal*.

Dans le système elliptique il n'y a que deux axes (système elliptique proprement dit), *ou il y a une infinité d'axes* (système elliptique orthogonal), suivant que, dans l'involution des diamètres conjugués, un seul rayon est perpendiculaire à son conjugué, ou tous les rayons sont perpendiculaires à leurs conjugués. *Dans le système parabolique,* un des axes étant à l'infini, *il n'y a,* à proprement parler, *qu'un seul axe.*

9. Si l'involution des droites réciproques qui passent par un point se compose d'angles droits, ce point est nommé *antifoyer* (ou foyer) du système polaire (*).

1° *Dans tout système polaire il y a deux antifoyers. Si le système est hyperbolique ou elliptique proprement dit, ces antifoyers se trouvent sur un axe* (*axe antifocal*), *à égale distance du centre* O; *si le système est elliptique orthogonal, ils se confondent avec le centre* O; *si le système est parabolique, un des antifoyer tombe en* O *ou est à l'infini dans la direction de l'axe du système.*

2° *Les droites réciproques et orthogonales déterminent une involution sur chacun des axes du système. Deux points* M, M' *conjugués de cette involution sont tels que deux droites passant, l'une par* M, *l'autre par* M', *sont orthogonales si elles sont réciproques, et inversement.*

L'involution sur l'axe antifocal a deux points doubles : ce sont les antifoyers; l'involution sur l'autre axe

(*) Voir Schröter, *loc. cit.*, § 59, et pour les choses analogues dans les coniques : Reye, *Die Geometrie der Lage*. 2e édit., t. I, XIII. p. 127-136.

(*dans les systèmes polaires hyperbolique et elliptique, bien entendu*) *n'a pas d'éléments doubles, et ses segments sont vus sous des angles droits de chacun des antifoyers.*

Deux droites réciproques et orthogonales sont séparées harmoniquement par les antifoyers.

10. Deux droites réciproques et orthogonales qui passent par un point seront nommées *axes principaux* du point (*). Les axes du système (n° 5) ne sont donc autre chose que les axes principaux du centre O.

1° *Si φ est un antifoyer, toutes les droites qui passent par φ sont ses axes principaux; tout point autre que les antifoyers n'a que deux axes principaux.*

2° *Les axes principaux d'un point sont les bissectrices des angles formés par les deux rayons menés de ce point aux antifoyers* (n° 9).

III. — Éléments symétriques.

11. Deux points du plan Σ situés sur un diamètre à égale distance de O seront nommés *points symétriques*.

Deux droites du plan Σ parallèles et équidistantes de O seront nommées *droites symétriques*.

12. Parmi les différentes propriétés des éléments symétriques nous signalerons les suivantes :

1° *Sur une droite a réciproque à sa symétrique b, il n'existe qu'un seul point réciproque à son sy-*

Par un point A réciproque à son symétrique B, il ne passe qu'une seule droite réciproque à sa sy-

(*) Schröter (*loc. cit.*, § 60) démontre quelques propriétés très-élégantes de ces couples de droites.

métrique : c'est l'antipôle de b.

2° *Si m est une droite non réciproque à sa symétrique* m_0, *les couples, en nombre infini, des points A, A' situés sur m, et tels que l'un d'eux A' est réciproque et l'autre A symétrique d'un même point* A_0 *de* m_0, *forment une involution ; les points doubles, quand ils existent, sont des points réciproques et symétriques.*

3° *Si* A_0, *A' sont des points réciproques situés sur un diamètre (les asymptotes exceptées) et si A est symétrique de* A_0, *quand ce dernier point parcourt le diamètre* OA_0, *les couples des points* A_0A' *et AA' forment respectivement deux involutions superposées, ayant le même centre O.*

4° *Sur une droite m non réciproque à sa symétrique, il y a deux points réciproques à leurs propres symétriques, ou il n'y en a aucun.*

métrique : c'est l'antipolaire de B.

Si M est un point non réciproque à son symétrique M_0, *les couples, en nombre infini, des droites a, a' concourant en* M_0, *telles que l'une d'elles a' soit réciproque et l'autre a symétrique d'un même rayon* a_0 *du faisceau* M_0, *forment une involution ; les éléments doubles, quand ils existent, sont des droites réciproques et symétriques.*

Si a_0, *a' sont des droites réciproques et parallèles (les directions asymptotiques exceptées), et si a est symétrique à* a_0, *quand cette dernière droite se meut parallèlement à elle-même, les couples des droites* a_0a' *et aa' forment respectivement deux involutions superposées, ayant le même rayon central passant par O.*

Par un point M non réciproque à son symétrique, il passe deux droites réciproques à leurs propres symétriques, ou il n'en passe aucune.

IV. — Conique centrale. Ses rapports avec la directrice.

13. En s'appuyant sur ces propriétés et par de simples considérations de Géométrie projective peu différentes de celles qui ont été employées par le professeur Reye (*Geometrie der Lage*, t. II, p. 60) pour établir l'existence de la directrice, on trouve que :

Théorème. — *Si, dans un système polaire, il existe un élément réciproque à son propre symétrique, il y en a une infinité : dans ce cas il existe une conique effective* [*] C, *qui est, en même temps, le lieu des points réciproques et symétriques et l'enveloppe des droites réciproques et symétriques, et qui a pour diamètres conjugués les diamètres conjugués du système.*

Quand cette conique C existe, nous la nommerons *conique centrale du système polaire.* Elle a en commun avec la conique directrice, outre le centre et les diamètres conjugués, la propriété de se correspondre à elle-même, de coïncider avec sa propre conique antipolaire (n° 2).

14. *L'antipôle d'une droite est le pôle, par rapport à la conique centrale, de la droite symétrique.*	*L'antipolaire d'un point est la polaire, par rapport à la conique centrale, du point symétrique.*

Un système polaire Σ est dit *système polaire réciproque* (Poncelet) par rapport à la conique fondamentale D quand la directrice D existe. Quand la conique centrale existe et qu'on y rapporte le système polaire,

(*) C'est-à-dire qui ne peut se réduire à deux droites (ou points) ni à une droite (ou point) double.

ce système peut, raisonnablement, être nommé *système polaire symétrique* (par rapport à la conique centrale C). La liaison qui existe entre l'antipôle et l'antipolaire est ainsi nettement définie, soit au moyen de la conique directrice, soit au moyen de la conique centrale.

15. On peut remarquer ce qui suit sur les conditions d'existence et de coexistence des coniques D et C.

THÉORÈME. — *Dans tout système polaire* Σ *il existe toujours au moins une des coniques* D (*directrice*), *ou* C (*centrale*).

Si le système polaire est hyperbolique (n° 7), *les deux coniques coexistent. La directrice et la centrale sont des hyperboles conjuguées* (*supplémentaires*) *dont les asymptotes communes sont celles du système polaire. La directrice se trouve dans celui des deux angles asymptotiques où deux points réciproques de* Σ, *en ligne droite avec le centre du système, se trouvent du même côté de ce centre.*

Si le système polaire est elliptique (n°s 7 et 8), *une seule des deux coniques existe réellement et est une ellipse* [*] *dont les diamètres conjugués coïncident avec ceux du système. Cette ellipse est la directrice* D *ou la centrale* C, *suivant que deux points réciproques de* Σ, *en ligne droite avec le centre du système, sont du même côté ou de part et d'autre du centre.*

Si le système polaire est parabolique (**) (n° 7), *les deux coniques coexistent, mais sont identiques. La di-*

(*) Dans le système elliptique orthogonal cette ellipse est un cercle.

(**) Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que dans ce système, le centre étant à l'infini, un point A peut être regardé comme son propre symétrique ou comme le symétrique d'un autre point quelconque du diamètre passant en A, et une droite *a* peut être regardée comme symétrique à elle-même ou à une autre droite quelconque parallèle à *a*; d'après

rectrice et la centrale se confondent en une même parabole, ayant pour diamètres ceux du système, et pour laquelle les directions conjuguées aux diamètres coïncident avec les directions conjuguées aux mêmes diamètres dans le système polaire.

16. La théorie des coniques conjuguées harmoniques (SCHRÖTER, *loc. cit.*, §§ 27, 54) conduit à quelques autres propriétés de la directrice et de la centrale. Par exemple : *Dans le système hyperbolique, les hyperboles* D *et* C *forment, avec chacune des ellipses ayant pour diamètres conjugués deux de leurs diamètres conjugués, un terne de coniques harmoniques. Chacune de ces ellipses coïncide (comme la directrice et la centrale,* nos 2 et 13) *avec sa propre antipolaire.*

Dans le système elliptique, chaque couple d'hyperboles supplémentaires ayant pour diamètres conjugués les deux mêmes diamètres conjugués de D (*ou de* C, *quand* D *n'existe pas*) *forme avec l'ellipse* D (*ou* C) *un terne de coniques harmoniques. Toutes ces hyperboles sont leurs propres antipolaires.*

Dans le système parabolique, soient AB une corde quelconque de la conique directrice; M le point de cette conique dont la tangente est parallèle à AB; ABCD le parallélogramme ayant cette corde pour côté et le point M pour centre; E et F les points milieux de AB, CD (EF sera parallèle à BC et passera par M ou coïncidera avec le diamètre conjugué à la direction AB). Ceci posé, *la parabole directrice, — la parabole* (bitangente à la directrice) *passant par* M, C, D *et tangente en ces points*

---

cela, la conique centrale n'a, à la rigueur, aucune signification dans le système parabolique, et cette proposition doit être considérée comme une définition plutôt que comme un théorème.

aux droites t, EC, ED, — *l'hyperbole passant par* A, B, C, D et tangente en ces points aux droites FA, FB, EC, ED sont trois coniques harmoniques; chacune d'elles se confond avec son antipolaire, quelle que soit la corde AB (*).

17. La conique centrale d'un système polaire Σ peut se concevoir autrement, et se présenter sous d'autres aspects.

1° Nommons π le complexe des éléments M (points ou droites) situés dans le plan Σ; π_1 celui des éléments M_1 (points ou droites) symétriques aux M; π_2 celui des éléments m_2 (droites ou points) correspondant dans Σ aux M. Les figures (ou systèmes plans) π_1 et π_2 sont évidemment, l'une la *transformée homologique harmonique* (**) de la figure π (O et j_∞ étant le centre et l'axe d'homologie), l'autre *la transformée antipolaire* (n° 4) de la même figure π; en d'autres termes, le système plan π est homographique (collinéaire) de π_1, réciproque de π_2 et se trouve en involution avec ces deux systèmes; par suite, à toute courbe de π correspondent (doublement) deux courbes, distinctes en général, l'une dans π_1, l'autre dans π_2 : *la conique centrale de Σ est la courbe de π avec laquelle viennent se confondre les deux courbes correspondantes de π_1 ou de π_2.*

2° Si nous rapportons l'un à l'autre les deux plans superposés π_1 et π_2, en prenant comme correspondants deux éléments M_1 et m_2 qui correspondent à un même élément M de π (et qui, par suite, seront de nature différente : m_2 sera une droite ou un point suivant que M_1

(*) Les coniques dont il est ici question ne sont pas les seules du plan Σ qui coïncident avec leurs antipolaires.

(**) Voir Staudt, *Geometrie der Lage*, nos 227, 340.

est un point ou une droite), il est facile de démontrer qu'*ils forment un nouveau système polaire* Σ' *ayant le même centre et les mêmes diamètres conjugués que le premier* Σ; et ensuite que : *La conique centrale de* Σ *est la directrice de* Σ'.

V. — Éléments qui déterminent un système polaire.

18. On démontre assez facilement les propositions suivantes (et leurs corrélatives, dont j'omets l'énoncé pour abréger), qui se rapportent aux éléments dont on peut disposer arbitrairement pour déterminer un système polaire (voir aussi n° 6).

A. Si dans un système polaire on donne un triangle conjugué et les involutions des droites réciproques issues de deux de ses sommets, le système est déterminé.

B. Un triangle conjugué ABC étant donné dans un système polaire Σ, si l'on prend une droite p passant par un sommet A comme antipolaire d'un point P du côté opposé, le système Σ est déterminé si l'on donne en outre :

1° L'involution des droites réciproques issues d'un des autres sommets;

2° Ou bien l'involution des droites réciproques passant par P (P n'étant pas sur p);

3° Ou bien un point R de p comme antipôle d'une droite r passant par P (P étant supposé sur p).

C. Étant donnés un point P et une droite p comme correspondants dans un système polaire Σ, on peut, pour déterminer le système, prendre encore arbitrairement un point Q et une droite q pour correspondants, pourvu que (*) :

1° Si P est en dehors de p, on donne l'involution des

(*) La substance de ce théorème, sinon la forme, est due à Staudt, *Geometrie der Lage*, n° 240.

droites réciproques issues de P et qu'en outre les points Q et $(p; q)$ soient projetés du point P par deux rayons conjugués de cette involution;

2° Si P est sur p, la droite q rencontre p sur l'antipôle de PQ, et qu'en outre un point R de p et une droite r passant par P soient donnés comme correspondants.

D. Si l'on prend comme correspondants dans un système polaire Σ les sommets et les côtés respectivement opposés d'un pentagone plan, le système est déterminé (*).

E. Si l'on prend deux triangles homologiques ABC, A'B'C' comme correspondants dans un système polaire Σ (A étant l'antipôle de B'C', etc.), le système est déterminé (**).

F. La conique directrice ou la conique centrale d'un système polaire étant donnée, ce système est déterminé.

19. Il faut remarquer les cas particuliers suivants :

G. Étant donnés dans un système polaire Σ les axes, un point propre P et son antipolaire p, le système est déterminé si les axes ne passent pas par P et ne sont pas parallèles à p, et si, en outre, p ne passe pas par le centre.

H. Étant donnés le centre O d'un système polaire, l'involution des droites réciproques issues d'un point S et l'antipolaire s de ce point, le système Σ est déterminé pourvu que SO et $S.js$ soient des rayons conjugués de cette involution (***).

K. Étant données les asymptotes d'un système anti-

(*) Staudt, *loc. cit.*, n° 238.

(**) Staudt, *loc. cit.*, n° 241.

(***) j représente la droite à l'infini du plan.

polaire hyperbolique, le système est déterminé pourvu que l'on prenne encore comme correspondants un point S et une droite s, de manière que les points S et (js) soient séparés harmoniquement par les asymptotes.

VI. — Quadrangles et quadrilatères conjugués.

20. On trouve le théorème suivant et son corrélatif dans la *Geometrie der Lage* de Staudt. Si, dans un quadrangle complet situé dans le plan d'un système polaire Σ, deux côtés sont respectivement réciproques à leurs côtés opposés, les deux côtés opposés restants sont aussi réciproques.

Ces théorèmes sont démontrés dans l'hypothèse de la polarité réciproque ordinaire par rapport à une conique donnée K, et M. le professeur Reye donne le nom de *Polviereck* de la conique K à un quadrangle complet tel que les trois couples de côtés opposés sont des droites réciproques par rapport à K, et celui de *Polvierseit* à la figure corrélative. Par analogie avec une autre dénomination généralement reçue, nous nommerons :

Quadrangle conjugué un quadrangle complet situé dans le plan d'un système polaire Σ, tel que ses couples de côtés opposés soient, deux à deux, des droites réciproques de Σ.

Quadrilatère conjugué un quadrilatère complet situé dans le plan d'un système polaire Σ, tel que ses couples de sommets opposés soient, deux à deux, des points réciproques de Σ.

Ces définitions données, il suffira de remarquer que *les propriétés relatives aux quadrangles et aux quadrilatères conjugués,* trouvées par M. Reye, pour le cas où il existe une conique fondamentale, et exposées dans un

Chapitre de sa *Geometrie der Lage* (seconde édition, t. I, p. 19 et suiv.), *restent vraies, sauf de légères modifications, pour les systèmes polaires en général.* Il est inutile d'en donner ici les énoncés.

Observation. — Des raisonnements semblables à ceux qui conduisent aux résultats ci-dessus mènent, pour les systèmes polaires dans l'espace, à la conception d'une *quadrique centrale* et permettent d'établir les conditions de son existence, ses rapports avec la *quadrique directrice* et ses principales propriétés.

MÉTHODE DIRECTE POUR CALCULER LA SOMME DES PUISSANCES α DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Pour évaluer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers, nous ferons usage de la méthode suivante, qui ne suppose pas connues les puissances antérieures des mêmes nombres, et que l'on pourrait appeler la *méthode des coefficients indéterminés*.

Représentons, en général, par Σn^α la somme des puissances α des n premiers nombres entiers.

Dans la formule du P. Jean Prestet (1675), qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, faisons $m = \alpha$ et $r = 1$; elle devient

$$(n+1)^{\alpha+1} = 1 + (\alpha+1)\Sigma n^\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\Sigma n^{\alpha-1} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\Sigma n^{\alpha-2} + \ldots + n$$

ou

$$(n+1)[(n+1)^\alpha - 1] = (\alpha+1)\Sigma n^\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\Sigma n^{\alpha-1} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\Sigma n^{\alpha-2} + \ldots$$

Or le facteur $(n+1)^\alpha - 1$ du premier membre est évidemment divisible par n; par suite, il en est de même du second membre. Nous en concluons que le polynôme ordonné par rapport à n, qui exprime la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers, est divisible par n.

D'ailleurs la plus haute puissance de n, qui soit contenue dans le premier membre, est du degré $\alpha+1$. Donc:

L'expression de la somme des puissances α des n premiers nombres entiers est un polynôme entier par rapport à n, qui est du degré $\alpha+1$ et divisible par n.

2. *Méthode des coefficients indéterminés.* — Pour exposer cette méthode, qui est très rapide, proposons-nous de calculer la somme des *cinquièmes* puissances des n premiers nombres entiers. En désignant par $\varphi(n)$ le polynôme entier en n qui exprime cette somme, nous pourrons écrire (n° 1)

$$(1) \quad \Sigma n^5 = \varphi(n) = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5 + Fn^6,$$

où A, B, C, ..., F représentent des coefficients numériques qu'il s'agit de déterminer.

Afin d'obtenir les valeurs numériques de ces coefficients, dans (1) remplaçons n par $n-1$; nous aurons, en vertu de la formule de Taylor,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \Sigma(n-1)^5 = \varphi(n) - \varphi'(n) + \frac{1}{2}\varphi''(n) - \frac{1}{2.3}\varphi'''(n) + \frac{1}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(n) \\ - \frac{1}{2\ldots5}\varphi^{\text{V}}(n) + \frac{1}{2\ldots6}\varphi(n)^{\text{VI}}. \end{aligned} \right.$$

Puisque

$$\Sigma n^5 - \Sigma(n-1)^5 = n^5,$$

il nous viendra, en retranchant (2) de (1), l'identité suivante :

$$(3)\quad \begin{cases} n^5 = \varphi'(n) - \frac{1}{2}\varphi''(n) + \frac{1}{2.3}\varphi'''(n) - \frac{1}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(n) \\ \qquad + \frac{1}{2\ldots5}\varphi^{\text{V}}(n) - \frac{1}{2\ldots6}\varphi^{\text{VI}}(n). \end{cases}$$

Il suffira maintenant de calculer les dérivées de $\varphi(n)$ au moyen de l'équation (1) et de substituer leurs expressions dans (3), pour avoir une équation identique qui fournira immédiatement six équations linéaires entre les six inconnues A, B, C, ..., F.

Prenons les dérivées successives de $\varphi(n)$. L'égalité (1) nous donne

$$\begin{array}{rl} \varphi'(n) = & A + 2Bn + 3Cn^2 + 4Dn^3 + 5En^4 + 6Fn^5, \\ -\frac{1}{2}\varphi''(n) = & \quad\; - B - 3Cn - 6Dn^2 - 10En^3 - 15Fn^4, \\ +\frac{1}{2.3}\varphi'''(n) = & \qquad\quad + C + 4Dn + 10En^2 + 20Fn^3, \\ -\frac{1}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(n) = & \qquad\qquad\quad - D - 5En - 15Fn^2, \\ +\frac{1}{2\ldots5}\varphi^{\text{V}}(n) = & \qquad\qquad\qquad\quad + E + 6Fn, \\ -\frac{1}{2\ldots6}\varphi^{\text{VI}}(n) = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - F. \end{array}$$

Si nous mettons ces expressions dans l'identité (3), et que nous égalions à zéro les coefficients des puissances successives de n, nous obtiendrons les six équations du

premier degré

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} A - B + C - D + E - F &= 0,\\ +2B - 3C + 4D - 5E + 6F &= 0,\\ +3C - 6D + 10E - 15F &= 0,\\ +4D - 10E + 20F &= 0,\\ +5E - 15F &= 0,\\ +6F &= 1.\end{aligned}\right.$$

Résolvons ces équations de proche en proche à partir de la dernière; nous obtenons les valeurs cherchées

$$F = \frac{1}{6}\quad E = \frac{1}{2},\qquad D = \frac{5}{12},$$

$$C = 0,\quad B = -\frac{1}{12},\quad A = 0.$$

En mettant ces valeurs dans le développement (1), nous trouvons que la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est

$$\Sigma n^5 = -\frac{n^2}{12} + \frac{5n^4}{12} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{6}$$

ou

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2 (2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1).$$

Le polynôme entre parenthèses et sa dérivée

$$8n^3 + 18n^2 + 10n$$

s'annulent pour $n = -1$; par conséquent ce polynôme est divisible par $(n+1)^2$ et fournit le quotient

$$2n^2 + 2n - 1.$$

Nous trouvons ainsi la formule bien simple

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$$

3. *Formation des équations linéaires aux coefficients indéterminés.* — Les équations (4) peuvent s'écrire immédiatement.

En effet, il est aisé de remarquer que, dans la disposition adoptée, les coefficients de la $p^{\text{ième}}$ des lettres A, B, C, ..., ou de la $p^{\text{ième}}$ colonne verticale sont les coefficients numériques du binôme développé

$$-(-a+b)^p,$$

moins le dernier de ces coefficients.

De plus les seconds membres des α premières équations sont tous égaux à zéro, et celui de la dernière est toujours égal à 1.

Le Tableau de nos équations se forme d'une manière aisée et s'obtient presque instantanément au moyen du triangle arithmétique de Pascal.

Appliquons cette règle à la recherche de la somme des cubes des n premiers nombres entiers. Les équations aux coefficients seront

$$\begin{aligned} A - B + C - D &= 0,\\ +2B - 3C + 4D &= 0,\\ +3C - 6D &= 0,\\ +4D &= 1 \end{aligned}$$

et nous fourniront de suite les valeurs

$$D = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad A = 0.$$

Nous trouvons ainsi que

$$\Sigma n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2 (n^2 + 2n + 1)$$

ou

$$\Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

Nous donnerons dans un prochain article les expressions réduites, qui représentent les sommes des *dix* premières puissances des n premiers nombres entiers, ainsi que les relations remarquables qui existent entre ces sommes. (*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. de Jonquières.

Monsieur et cher Rédacteur,

Je viens de remarquer, dans la livraison des *Nouvelles Annales* pour le mois de juillet (t. XVIII, 2e série, p. 333), qu'un de vos honorables correspondants me cite très obligeamment et parle du « théorème de M. de Jonquières », faisant allusion à cette proposition que « le nombre 5 est le seul qui jouisse de la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs et d'avoir pour carré un nombre qui est aussi égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs. »

J'ai effectivement donné sous cette forme la proposition dont il s'agit dans le Tome XVII (2e série) des *Nouvelles Annales*, en la faisant découler d'autres théorèmes nouveaux dont l'exactitude absolue subsiste. Mais cet énoncé est trop général. En fait, je n'ai, pour ce qui regarde cette proposition, prouvé que les deux points suivants :

1° *Parmi les nombres* premiers *ou puissances de nombres* premiers, *le nombre* 5 *est le seul qui jouisse de la propriété énoncée.*

2° *Parmi les nombres* composés *dont l'une des représentations* PROPRES *en sommes de deux carrés* (lesquelles sont au nombre de 2^{n-1}, n étant le nombre des facteurs premiers) *est telle que les deux carrés y soient ceux de deux entiers consécutifs, il n'en existe aucun dont le carré* (qui admet pareillement 2^{n-1} représentations propres du même genre) *ait pour représentation* correspondante à celle-là *la somme des carrés de deux entiers consécutifs*. J'entends, ici comme dans le Mémoire précité, par *représentations correspondantes* du carré celles qui se déduisent de celles du nombre lui-même, chacune à chacune, par la formule dite « des triangles rectangles ».

Il pourrait donc arriver que la propriété existât pour l'une, ou même pour plusieurs, des autres représentations, je veux dire de celles qui ne sont pas correspondantes. C'est là une nouvelle recherche qui reste à faire et qui est sans doute fort difficile.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. SU ALCUNE CURVE DI FACILE COSTRUZIONE; Memoria di *Giusto Bellavitis*. Napoli. Tipografia dell'Accademia Reale delle Scienze, diretta da Michele Rubertis. 1879.

2. ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI, serie terza. *Transunti*, volume III, Fascicolo 7° ed ultimo. Giugno 1879. Roma. Coi tipi del Salviucci. 1879.

3. SUR LE PLANIMÈTRE POLAIRE DE M. AMSLER; par M. *C.-A. Laisant*. Bruxelles. F. Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique. 1879.

4. Cours de Calcul infinitésimal; par *J. Hoüel*, professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Tome II. Paris. Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55. (1879).

REMARQUES SUR LES PROPRIÉTÉS DU NOMBRE 10;

Par M. L. HUGO.

Le nombre dix est la racine carrée de la somme des nombres Laisant (p. 329) *et de leur exposant* 3 (*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1270

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 287);

Par UN ANONYME.

On sait que les six normales menées par un point à une surface du second ordre sont sur un même cône du second degré. On propose de trouver le lieu que doit décrire le sommet S *de ce cône pour que les différents cônes obtenus admettent les mêmes plans cycliques.*

(Gambey.)

Soient S_0, S_1 les sommets de deux cônes du second

(*) Les nombres dont il s'agit sont 1, 8, 17, 18, 26, 27. Leur somme, augmentée de l'exposant 3, est égale à 100.

degré, ayant chacun six génératrices normales à l'ellipsoïde représenté par $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, et (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points S_0, S_1. Les équations de ces cônes seront, comme on sait,

$$(S_0)\ldots\frac{(b^2-c^2)x_0}{x-x_0}+\frac{(c^2-a^2)y_0}{y-y_0}+\frac{(a^2-b^2)z_0}{z-z_0}=0,$$

$$(S_1)\ldots\frac{(b^2-c^2)x_1}{x-x_1}+\frac{(c^2-a^2)y_1}{y-y_1}+\frac{(a^2-b^2)z_1}{z-z_1}=0.$$

Chacun d'eux a trois génératrices parallèles aux axes des coordonnées; si, de plus, ces deux cônes admettent les mêmes plans cycliques, toutes les génératrices de l'un d'eux seront respectivement parallèles aux génératrices de l'autre, car les directions des génératrices d'un cône du second degré sont déterminées par les directions de trois d'entre elles et par celle d'un plan cyclique.

Cela posé, soient

$$x-x_0=m(z-z_0)\quad \text{et}\quad y-y_0=n(z-z_0)$$

les équations d'une génératrice quelconque du cône (S_0); les coefficients m, n seront liés entre eux par l'équation

$$\frac{(b^2-c^2)x_0}{m}+\frac{(c^2-a^2)y_0}{n}+(a^2-b^2)z_0=0$$

ou

$$(1)\qquad \left(\frac{b^2-c^2}{m}\right)\frac{x_0}{z_0}+\left(\frac{c^2-a^2}{n}\right)\frac{z_0}{x_0}+a^2-b^2=0.$$

Une parallèle à cette génératrice du cône S_0, menée par le point S_1, sera une génératrice du cône S_1; on aura donc

$$(2)\qquad \left(\frac{b^2-c^2}{m}\right)\frac{x_1}{z_1}+\left(\frac{c^2-a^2}{n}\right)\frac{y_1}{z_1}+a^2-b^2=0.$$

Des équations (1) et (2) on peut conclure $\frac{x_1}{z_1}=\frac{x_0}{z_0}$,

$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_0}{z_0}$, car autrement ces équations détermineraient les valeurs des coefficients nécessairement variables m, n.

Les égalités $\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_0}{z_0}$ montrent que les sommets S_0, S_1 sont sur une droite qui passe par l'origine des coordonnées; par conséquent, le lieu cherché est un diamètre de l'ellipsoïde.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Fauquembergue; G. Konigs, élève du Lycée Saint-Louis.

M. Konigs fait remarquer, comme l'auteur de la solution précédente, que tous les cônes du second degré qui ont même plan cyclique et trois génératrices de direction fixe sont homothétiques.

Question 1280

(voir 2e série, t. XVII, p. 383);

PAR M. S. REALIS.

L'équation $x^3 - (a^2 - b + c)x + ab = 0$, *dans laquelle* b *est un entier plus grand que zéro,* c *un entier différent de zéro, et* a *un entier dont la valeur absolue est plus grande que celle de* $\frac{c}{2}$, *ne peut pas avoir deux racines entières.*

Si l'équation a des racines imaginaires, la racine réelle est incommensurable.

Posons

$$f(x) = x^3 - (a^2 - b + c)x + ab.$$

On trouve

$$f(-a+1) = (a-1)(2a+c-1) + b,$$
$$f(-a) = ac,$$
$$f(-a-1) = -(a+1)(2a-c+1) - b.$$

Si les entiers a, b, c sont tels qu'il est dit dans l'énoncé de la question, savoir : a différent de zéro [et qu'on peut toujours supposer positif, puisque, au besoin, on le rend tel en changeant x en $-x$ dans l'équation $f(x)=0$] ; b plus grand que zéro ; c différent de zéro, et plus petit que $2a$ en valeur absolue, $f(-a+1)$ et $f(-a-1)$ seront de signes différents, et aucune de ces quantités ne sera nulle. Entre les deux entiers $-a+1$ et $-a-1$ il y a donc une racine de l'équation $f(x)=0$. Si cette racine était entière, elle ne pourrait être que $-a$; cela n'est pas, puisque la quantité $f(-a)=ac$ n'est pas nulle ; la racine n'est donc pas entière, et, comme elle ne saurait être fractionnaire, elle est incommensurable.

De là résulte la proposition énoncée, et l'on voit de plus que la relation posée entre les valeurs numériques de a et de c est une condition suffisante, mais pas nécessaire, pour établir l'existence de la racine incommensurable.

Soit fait, comme application,

$$a=2A+1, \quad b=A^2+A+1, \quad c=3.$$

L'équation sera

$$x^3-3(A^2+A+1)x+2A^3+3A^2+3A+1=0,$$

et nous verrons tout de suite que, A étant entier, elle a une racine incommensurable (elle en a même trois, comme il est facile de le prouver). Cette équation rentre, en effet, dans une classe particulière d'équations irréductibles, traitées d'abord par M. Lobatto, et ensuite par M. Serret, et pour lesquelles on peut consulter le *Journal de M. Liouville* (t. IX et XV de la première

série) ou bien l'*Algèbre supérieure* (2e édition, p. 223 et 476).

Soit fait encore

$$a = -\mathrm{A}, \quad b = \mathrm{A}^2, \quad c = 4;$$

d'où

$$f(x) = x^3 - 4x - \mathrm{A}^3.$$

L'équation $f(x) = 0$ a une seule racine positive, A étant positif. Cette équation peut s'écrire

$$(x-2)x(x+2) = \mathrm{A}^3,$$

d'où, en prenant A entier et > 2, et vu que la valeur de x est incommensurable, on conclut que *le produit de trois nombres impairs consécutifs ne peut pas être un cube*. C'est un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale. On conclut de même que le produit de trois nombres pairs consécutifs n'est pas un cube, ce qui revient à dire que *le produit de trois entiers consécutifs n'est pas un cube* : cas particulier d'une proposition bien connue.

Question 1299

(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. MORET-BLANC.

La somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (ÉDOUARD LUCAS.)

La somme des carrés des x premiers nombres étant $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$, il faut démontrer qu'on ne peut avoir,

en nombres entiers, aucune des trois égalités

(I) $$x(x+1)(2x+1) = 12y^2 = 3z^2,$$
(II) $$x(x+1)(2x+1) = 18y^2 = 2z^2,$$
(III) $$x(x+1)(2x+1) = 36y^2 = z^2.$$

I. Supposons qu'on puisse avoir en nombres entiers

$$x(x+1)(2x+1) = 3z^2.$$

Les trois facteurs étant, deux à deux, premiers entre eux, doivent être deux carrés, et le triple d'un carré; mais, deux entiers consécutifs ne pouvant être simultanément des carrés, l'un des nombres x, $x+1$ devra être le triple d'un carré, et ce sera nécessairement x, car autrement x serait de la forme $3m-1$, qui ne peut appartenir à un carré. J'ajoute que x devra être le triple d'un carré pair, car, s'il était le triple d'un carré impair, il serait de la forme $8m+3$, et $2x+1$ serait de la forme $8m+7$, incompatible avec celle d'un carré.

Le seul cas où l'impossibilité ne soit pas démontrée est le suivant :

$$x = 12u^2, \quad x+1 = v^2, \quad 2x+1 = w^2.$$

On en tire

$$w^2 - 1 = 24u^2, \quad \text{d'où} \quad (w+1)(w-1) = 24u^2.$$

Le plus grand commun diviseur des facteurs $w+1$ et $w-1$ étant 2, on aura nécessairement à considérer l'un des systèmes suivants :

(1) $$w+1 = 2\alpha^2, \quad w-1 = 12\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2,$$
(1′) $$w-1 = 2\alpha^2, \quad w+1 = 12\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2,$$
(2) $$w+1 = 4\alpha^2, \quad w-1 = 6\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2,$$
(2′) $$w-1 = 4\alpha^2, \quad w+1 = 6\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2.$$

Le système (1)

$$w+1=2\alpha^2,\quad w^2+1=2v^2$$

a été traité complétement par M. Gerono (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 321); il n'admet que les solutions

$$w=1,\quad \text{d'où}\quad x=0,$$

$$w=-1,\quad \text{d'où}\quad w-1=-2=12\beta^2,$$

égalité impossible;

$$w=7,\quad \text{d'où}\quad w-1=6=12\beta^2,$$

égalité, de même, impossible en nombres entiers.

Ces trois solutions sont donc inadmissibles.

Le système (1')

$$w-1=2\alpha^2,\quad w^2+1=2v^2,\quad w+1=12\beta^2$$

conduit aux mêmes calculs et ne donne que des impossibilités.

Considérons le système (2)

$$w+1=4\alpha^2,\quad w^2+1=2v^2,\quad w-1=6\beta^2.$$

On tire des deux premières équations

$$w=4\alpha^2-1,\quad (4\alpha^2-1)^2+1=2v^2,\quad 4\alpha^4+(2\alpha^2-1)^2=v^2;$$

v impair,

$$(v+2\alpha^2-1)(v-2\alpha^2+1)=4\alpha^4.$$

Les deux facteurs $(v+2\alpha^2-1)$ et $(v-2\alpha^2+1)$ sont des nombres pairs, ayant pour plus grand commun diviseur 2, car tout diviseur commun à ces deux nombres doit diviser leur somme $2v$, et, comme v est premier avec $2\alpha^2-1$, ce diviseur commun ne peut être autre que 2. On doit donc avoir

$$v+2\alpha^2-1=2m^4,\quad v-2\alpha^2+1=2n^4,$$

où m et n sont premiers entre eux.

Ces équations donnent

$$2\alpha^2 - 1 = m^4 - n^4, \quad m^4 n^4 = \alpha^4, \quad m^2 n^2 = \alpha^2,$$

d'où

$$2m^2n^2 - 1 = m^4 - n^4, \quad n^4 + 2m^2n^2 - m^4 - 1 = 0,$$

$$n^2 = -m^4 \pm \sqrt{2m^4+1};$$

$2m^4 + 1$ devant être un carré, il faut que $m = 0$ (*). Il s'ensuit

$$n^2 = 1, \quad \alpha = 0, \quad v = 1, \quad x = 0,$$

solution inadmissible.

Le cas (2') conduit aux mêmes calculs. L'équation entre m et n devient

$$m^4 - 2m^2n^2 - n^4 - 1 = 0, \quad m^2 = n^2 \pm \sqrt{2n^4+1}.$$

Le reste du calcul est le même.

Ainsi, l'égalité $x(x+1)(2x+1) = 3z^2$ est impossible en nombres entiers.

II. Considérons maintenant l'égalité

$$x(x+1)(2x+1) = 2z^2.$$

Il faut que parmi les trois facteurs du premier membre il y ait deux carrés et un double carré, qui ne peut être que x ou $x+1$.

Il y a donc à considérer les deux systèmes

$$x = 2u^2, \quad x+1 = v^2, \quad 2x+1 = w^2,$$
$$x = u^2, \quad x+1 = 2v^2, \quad 2x+1 = w^2.$$

(*) Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 6. Théorème III : *La formule* $x^4 + 2y^4$ *ne peut être égale à un carré, si ce n'est lorsque* $y = 0$.

On tire du premier $w^2 - 1 = 4u^2$, égalité impossible, à moins de supposer

$$w = 1, \quad u = 0, \quad \text{d'où} \quad x = 0,$$

valeur inadmissible.

On tire du second $w^2 + 1 = 4v^2$, égalité impossible, suivant le module 4.

III. L'égalité $x(x+1)(2x+1) = z^2$ exige que les trois facteurs soient des carrés, ce qui est évidemment impossible pour les deux premiers.

Question 1300

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 527);

PAR M. MORET-BLANC.

La somme des x premiers nombres triangulaires n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (ÉDOUARD LUCAS.)

Cette somme est égale à $\frac{x(x+1)(x+2)}{6}$. Il faut démontrer qu'on ne peut avoir en nombres entiers aucune des trois égalités

$$\text{(I)} \qquad x(x+1)(x+2) = 3z^2,$$
$$\text{(II)} \qquad x(x+1)(x+2) = 2z^2,$$
$$\text{(III)} \qquad x(x+1)(x+2) = z^2.$$

Les deux dernières exigent que la différence de deux carrés soit égale à une ou à deux unités, ce qui est impossible, à moins que l'un d'eux ne soit nul. Il en est de même de la première si x est impair.

Quand x est pair, l'égalité (I) devient, en posant $x = 2y$, et $z = 2u$,

$$y(y+1)(2y+1) = 3u^2,$$

équation dont l'impossibilité en nombres entiers a été démontrée dans la solution de la question 1299 (*voir* p. 473).

Question 1316

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 336);

PAR M. LEZ.

On prend sur la tangente à une cycloïde fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle au rayon de courbure en ce point : trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur quand la tangente se déplace. (BARBARIN.)

Dans une cycloïde, les coordonnées d'un point M étant

$$x = \mathrm{OP} = \mathrm{R}(\alpha - \sin\alpha) \quad (*),$$
$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{R}(1 - \cos\alpha),$$

la tangente MN en ce point a pour coefficient angulaire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

La normale MI au même point est égale à

$$\mathrm{R}\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure : OX, OY, axes de coordonnées rectangulaires; CM, rayon R d'une circonférence C tangente à OX au point I; α, l'angle MCI.

Si donc on prend sur la tangente une longueur MN proportionnelle à MI (ou bien au rayon de courbure qui est le double de la normale) et qu'on mène du point M une perpendiculaire MD à l'ordonnée de N, le triangle rectangle MND donnera

$$\begin{aligned} ND &= MN \sin NMD = mR \sin\alpha, \\ MD &= MN \cos NMD = mR(1 - \cos\alpha); \end{aligned}$$

par suite, les coordonnées d'un point N du lieu cherché seront

$$\begin{aligned} x &= R(\alpha - \sin\alpha + m - m\cos\alpha), \\ y &= R(1 - \cos\alpha + m\sin\alpha). \end{aligned}$$

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point étant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha + m\cos\alpha}{1 - \cos\alpha + m\sin\alpha},$$

on trouve que l'équation de la normale est

$$\begin{aligned} y(\sin\alpha + m\cos\alpha) &+ x(1 - \cos\alpha + m\sin\alpha) \\ &- R(1 - \cos\alpha + m\sin\alpha)(\alpha + m) = 0. \end{aligned}$$

Elle rencontre l'axe OX en un point I′, dont l'abscisse $x = (\alpha + m)R$.

Or, si l'on joint N au centre C′ d'un cercle de rayon R tangent à OX au point I′, on aura, dans le triangle rectangle NC′B (*),

$$NB = R(m\sin\alpha - \cos\alpha) \quad \text{et} \quad C'B = R(\sin\alpha + m\cos\alpha),$$

d'où

$$NC' = R\sqrt{1 + m^2}.$$

De plus, $CC' = II' = mR$, et l'on trouve facilement

(*) B est le point où l'ordonnée de N rencontre la droite CC′ parallèle à l'axe OX.

que l'angle $NC'I = NC'C + CC'I = \alpha = MCI$; l'angle $NC'I'$ est donc la somme de l'angle constant $IC'I'$ et de l'angle variable α.

Par suite, à chaque variation de α correspond une direction déterminée de $C'N$; en outre, la distance du point N au centre C' étant invariable, le point N décrit évidemment une cycloïde.

QUESTIONS.

1328. Étant données les équations

(1) $$5x^2 + 5y^2 - z^2 + 60x - 24z = 0,$$

(2) $$25x^2 + 25y^2 + z^2 - 15xz = 0,$$

(3) $$75x^2 + 75y^2 + 2z^2 + 5yz - 45xz = 0,$$

représentant des surfaces rapportées à un même système d'axes rectangulaires, on demande: 1° de trouver le genre de chaque surface; 2° de trouver l'intersection des surfaces (1) et (2); 3° de trouver les projections sur les plans coordonnés de l'intersection des surfaces (1) et (3).

(Ernest Lebon.)

1329. Soit la série récurrente

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

telle que

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n;$$

trouver la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \frac{5}{3.8} + \cdots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}u_{n+3}}.$$

(E. Lucas.)

1330. Les nombres x, y, z étant exprimés par les formules

$$x = 2(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\alpha(2\beta + 3\gamma + 4\delta),$$
$$y = 2(-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\beta(2\alpha + 3\gamma + 4\delta),$$
$$z = 3(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 4\gamma(\alpha + \beta + 2\delta),$$

où α, β, γ, δ sont des entiers de signes quelconques, on peut énoncer les propriétés suivantes :

1° L'expression $x^2 + y^2 + z^2$ se réduit toujours à une somme de deux carrés.

2° Pour des valeurs entières convenables de α, β, γ, δ, tout nombre N, qui est égal à la somme de deux carrés entiers, et à la somme de trois carrés entiers, peut être représenté par l'expression ci-dessus, dont les termes ont été préalablement débarrassés des facteurs communs inutiles. (S. Realis.)

1331. On donne une conique (S), un point fixe A sur cette conique, une droite (D) et un point fixe a sur cette droite.

Une conique osculatrice à (S) au point A, et passant au point a, coupe de nouveau la conique (S) et la droite (D) en des points b et c, respectivement ; démontrer que la droite bc coupe (S) en un point fixe f.

(Genty.)

1332. Une droite SA pivote autour du sommet S d'une parabole qu'elle rencontre en A, et de ce point A on abaisse une perpendiculaire AP sur la tangente au sommet.

1° On joint le point P au pied D de la directrice par une droite qui rencontre AS en M.

2° On joint le point P au foyer F par une droite qui rencontre AS en N ;

3° On abaisse de P sur AS une perpendiculaire qui coupe AS au point Q, et l'on prolonge PQ d'une quantité égale QR.

Démontrer que :

Le point M décrit une hyperbole;

Le point N, une ellipse;

Le point Q, un cercle;

Et le point R, une strophoïde. (Ed. Guillet.)

1333. Étant donnée une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale, par rapport à un cercle osculateur à la courbe. Trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues. (Laisant.)

1334. Un quadrilatère est circonscrit à un cercle dont le rayon est r, et ses sommets sont sur un autre cercle dont le rayon est R; si D représente la distance des centres des cercles, démontrer que le rectangle des diagonales du quadrilatère est égal à $\frac{8R^2r^2}{R^2 - D^2}$.

(C. Leudesdorf, M. A.)

(Extrait du Journal anglais : *The educational Times.*)

1335. Démontrer :

1° Que les solutions entières et positives de l'équation $24x^2 + 1 = y^2$, dont les deux premières sont $x = 0$ et $y = 1$; $x = 1$ et $y = 5$, se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de x ou de y de dix fois la dernière pour obtenir la suivante;

2° Que les solutions entières et positives de l'équation $2x^2 + 1 = 3y^2$, dont les deux premières sont $x = 1$ et $y = 1$; $x = 11$ et $y = 9$, s'obtiennent comme celles de l'équation précédente (1°);

3° Que toute valeur du nombre $X = 3x^2 + 2$ (2°), ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de trois entiers consécutifs et à celle des carrés de deux entiers consécutifs est de la forme $360n + 5$.

(Lionnet.)

1336. Deux droites g, g', contenant deux séries homographiques des points A, B, C, D, ... et A', B', C', D', ... sont données. Les droites AA', BB', CC', DD', ... enveloppent une conique; quel est le lieu des milieux de ces droites?

(Droz.)

1337. Trouver un cercle par rapport auquel la cissoïde se transforme en elle-même par polaires réciproques.

(G. Fouret.)

Note. — M. Robaglia a résolu les questions 1311, 1314, 1317; et M. Droz, la question 1314, et les questions du Concours général de 1878, proposées pour les classes de philosophie, de seconde et de troisième. Ces différentes solutions nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de septembre.

M. Hilaire, professeur à Douai, nous a adressé une très intéressante solution d'un problème proposé en 1876 au Concours des classes de Mathématiques spéciales de l'Académie de Douai. Le défaut d'espace nous oblige à remettre cette solution à un autre numéro.

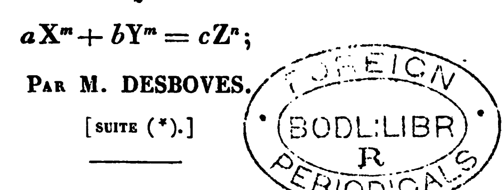
Nous avons reçu de M. J.-P. Isely, professeur à Neuchâtel, un Mémoire sur les *Solutions singulières* des équations différentielles à deux variables; et de M. Maurice d'Ocagne, élève en Mathématiques spéciales, une Note sur la détermination du centre des sections coniques et des surfaces du second ordre.

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n;$$

PAR M. DESBOVES.

[SUITE (*).]



V. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS A LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n.$$

19. Dans ce qui va suivre, nous dirons que deux fonctions entières $f(X, Y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont équivalentes lorsque la deuxième se déduit de la première en remplaçant dans celle-ci X, Y,... par des fonctions entières de $x, y, \ldots$, ou qu'après la substitution les deux fonctions ne diffèrent l'une de l'autre que par un facteur qui est une certaine puissance d'une fonction entière. C'est ainsi, par exemple, qu'en vertu de l'identité (40) les deux fonctions $X^3 + Y^3$ et $xy(x+y)$ sont équivalentes.

THÉORÈME X. — *Pour que l'équation*

$$aX^m + bY^m = cZ^n$$

ait une solution entière, il faut et il suffit que c soit de la forme $ax^m + by^m$.

En effet, la condition est suffisante, puisque, si elle est remplie, l'équation proposée admet la solution $(x, y, 1)$. Elle est aussi nécessaire, car, si (x_1, y_1, z_1) est une solu-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 433.

tion de l'équation, on a

$$ax_1^m + by_1^m = cz_1^n ;$$

d'où il suit que, si on laisse de côté le facteur z_1^n, c est bien de la forme demandée.

Si l'on considère le cas particulier où m et n sont égaux à 3 et a, b égaux à 1, on obtient la forme $x^3 + y^3$; mais les deux formes $xy(x+y)$ et x^3+y^3 étant équivalentes, comme on l'a déjà remarqué, on peut dire, avec M. Lucas, que, pour que l'équation $X^3 + Y^3 = cZ^3$ puisse être résolue en nombres entiers, il faut et il suffit que c, débarrassé de ses facteurs cubiques, soit de la forme $xy(x+y)$.

Remarque. — Toutes les formes de c que nous avons données, si nombreuses qu'elles soient, sont équivalentes à la forme $ax^m + by^m$, mais elles n'en sont pas moins utiles à connaître, car elles serviront à faire connaître *a priori* des solutions entières des équations, comme on le verra dans la Section suivante, consacrée aux applications numériques.

Théorème XI. — *a et b étant arbitraires dans l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$, on peut toujours trouver une fonction c de a, b et d'autant de variables que l'on veut, telle que l'équation puisse être résolue en nombres entiers.*

On voit d'abord aisément que, dans le produit représenté par le déterminant du n° 7, la partie qui est fonction des seules variables x_0, x_1 est $x_0^m - (-1)^m r x_1^m$; c'est encore ce que l'on reconnaît comme il suit.

En appelant Q la partie du produit qu'il s'agit de déterminer, on a

$$Q = (x_0 + \alpha x_1)(x_0 + \beta x_1)(x_0 + \gamma x_1) \ldots,$$

ou, en posant

$$\frac{x_0}{x_1} = -\xi,$$

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^m x_1^m (\xi - \alpha)(\xi - \beta) \ldots = (-1)^m x_1^m (\xi^m - r) \\ &= x_1^m [(-\xi)^m - (-1)^m r] \qquad = x_0^m - (-1)^m r x_1^m. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on multiplie entre elles d'abord n fonctions égales de l'espèce de celle qui est représentée par le déterminant du n° 7, puis ce produit lui-même par le produit d'un nombre quelconque p de fonctions de même espèce que la première, mais différentes de celles-ci et non égales entre elles, on obtient finalement un produit qui est une fonction de même espèce que ses facteurs, et, en représentant par Z la fonction élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance, par c le produit des p facteurs différents et par $(X_0)_k, (X_1)_k, \ldots$ les expressions de $X_0, X_1, \ldots$ qui correspondent à la dernière multiplication, on a une équation de cette forme :

$$(75) \qquad [(X_0)_k]^m - (-1)^m r [(X_1)_k]^m + \ldots = c Z^n.$$

En effet, d'après ce qui a été dit précédemment, on sait que le premier membre de l'équation (75) doit contenir les deux termes $(X_0)_k^m$, $-(-1)^m r (X_1)_k^m$.

On peut maintenant disposer des variables introduites par les p derniers facteurs de manière à annuler, dans le premier membre de l'identité (75), tous les termes, excepté les deux premiers. En effet, comme on le voit par les expressions des fonctions $X_0, X_1, X_2, \ldots$ données dans le n° 7, les équations à résoudre sont du premier degré, par rapport aux variables qui correspondent à l'un des p derniers facteurs.

Alors, en substituant dans l'équation (75) à ces variables leurs expressions, c deviendra une fonction de toutes les variables, excepté celles par rapport auxquelles

on a résolu. Il ne reste plus enfin, pour obtenir l'équation demandée, qu'à remplacer dans l'équation (75) r par $\frac{b}{a}$ ou $-\frac{b}{a}$ suivant que m est impair ou pair.

Une application particulière de la méthode précédente a été faite à la fin du n° 9 ; si on la reprend, ce qui précède deviendra clair.

Dans les deux théorèmes qui vont suivre, on suppose que n est égal à m, c'est-à-dire qu'il s'agira de l'équation

$$(76) \qquad aX^m + bY^m = cZ^m.$$

Théorème XII. — *Pour que l'équation* (76) *ait deux solutions, il faut et il suffit qu'après avoir multiplié ou divisé, s'il est nécessaire, les deux membres de l'équation par un même nombre entier, on obtienne pour* a, b, $-c$ *des expressions* $l^m - p^m$, $q^m - r^m$, $s^m - t^m$, l, q, s, p, r, t *étant des nombres entiers tels, que le produit des trois premiers soit égal au produit des trois autres.*

On remarque d'abord que l'on peut toujours obtenir une infinité d'équations de la forme (76) admettant deux solutions. En effet, si l'on écrit que l'équation (76) a les deux solutions (x, y, z), (x', y', z'), on obtient deux équations du premier degré, par rapport à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, qui donnent les valeurs de ces inconnues, et l'on peut prendre

$$(77) \qquad \begin{cases} a = z^m y'^m - y^m z'^m, \\ b = x^m z'^m - z^m x'^m, \\ -c = y^m x'^m - x^m y'^m. \end{cases}$$

Ainsi a, b, $-c$ sont chacun la différence des $m^{\text{ièmes}}$ puissances de deux nombres entiers, et si l'on représente zy', xz', yx', yz', zx', xy' respectivement par l, q, s, p, r, t, on a bien

$$(78) \qquad lqs = prt;$$

la condition énoncée est donc nécessaire. Je dis maintenant qu'elle est suffisante. En effet, supposons qu'après avoir multiplié ou divisé les deux membres de l'équation (76) par un facteur constant, on ait

$$a = l^m - p^m, \quad b = q^m - r^m, \quad -c = s^m - t^m, \quad lqs = prt;$$

on pose

$$(79) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} zy' = l, & yz' = p, & xz' = q, \\ zx' = r, & yx' = s, & xy' = t, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{z} = \frac{t}{l}, \quad \frac{y}{z} = \frac{s}{r}, \quad \frac{x}{y} = \frac{q}{p},$$

la dernière équation étant la conséquence des deux autres à cause de la relation (78).

Alors, pour obtenir des valeurs entières, on peut poser

$$(80) \qquad x = rt, \quad y = ls, \quad z = lr.$$

Si maintenant on substitue dans les équations (76) les valeurs de x, y, z (80), on a

$$x' = \frac{1}{l}, \quad y' = \frac{1}{r}, \quad z' = \frac{p}{sl},$$

ou encore, comme on ne prend que des valeurs entières,

$$(81) \qquad x' = sr, \quad y' = ls, \quad z' = pr.$$

Ainsi, lorsque les conditions de l'énoncé sont remplies, l'équation (76) a deux solutions entières (x, y, z), (x', y', z') données par les formules (80) et (81).

Remarque. — On voit aisément que le théorème n'est en défaut que si l'on a

$$(82) \qquad l = q, \quad p = r, \quad r^2 t = l^2 s;$$

dans ce cas, les deux solutions données par les formules

(80) et (81) n'en font plus qu'une seule. C'est ainsi, par exemple, que si l'on a l'équation

$$X^m + Y^m = (\alpha^m + \beta^m) Z^m,$$

ou

$$(\alpha^m - \beta^m) X^m + (\alpha^m - \beta^m) Y^m = (\alpha^{2m} - \beta^{2m}) Z^m,$$

poür laquelle les conditions de l'énoncé du théorème XII sont remplies, les formules (80) et (81) donnent la solution unique $(\alpha, \beta, 1)$.

Faisons une application du théorème XII à l'équation

$$X^4 - Y^4 = 1174935 Z^4.$$

On a les identités numériques

$$1174935 = \frac{79^4 - 67^4}{2^4}, \quad 2^4(79^4 - 67^4) = 133^4 - 59^4,$$
$$(79^4 - 67^4)(59^4 - 134^4) = (79 \times 59)^4 - 133 \times 67)^4;$$

alors, si l'on multiplie les deux membres de l'équation proposée par $118^4 - 268^4$, il vient

$$(118^4 - 268^4) X^4 + (316^4 - 266^4) Y^4$$
$$= [(79 \times 59)^4 - (133 \times 67)^4] Z^4,$$

et l'on a

$$l = 118, \quad q = 316, \quad s = 133 \times 67,$$
$$p = 268, \quad r = 266, \quad t = 79 \times 59.$$

On voit que la condition (78) est remplie, et, en appliquant les formules (80) et (81), on reconnaît que l'équation proposée admet les deux solutions $(79, 67, 2)$, $(133, 59, 4)$ (*).

(*) On s'appuie ici sur la résolution de l'équation $X^4 + Y^4 = Z^4 + U^4$, et sur la relation $(a^4 - b^4)(d^4 - b^4) = (ad)^4 - (bc)^4$, qui a lieu lorsque a, b, c, d sont des nombres tels que l'équation $a^4 - b^4 = c^4 - d^4$ soit satisfaite. Je reviendrai plus tard sur cette question.

Théorème XIII. — *Pour que l'on puisse trouver des équations de la forme* (76) *qui, pour une certaine valeur de m, admettent trois solutions, il faut et il suffit que l'on puisse résoudre en nombres entiers le système des deux équations*

$$(83)\qquad P^m + Q^m + R^m = U^m + V^m + T^m,$$

$$(84)\qquad PQR = UVT.$$

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, si l'équation (76) admet les deux solutions (x, y, z), (x', y', z'), les valeurs de a, b, c sont données par les formules (77), et l'on exprime que la même équation a une troisième solution (x'', y'', z'') en écrivant

$$(z^m y'^m - y^m z'^m) x''^m + (x^m z'^m - z^m x'^m) y''^m \\ = (x^m y'^m - y^m x'^m) z''^m,$$

ou

$$(zy'x'')^m + (xz'y'')^m + (yx'z'')^m \\ = (yz'x'')^m + (zx'y'')^m + (xy'z'')^m.$$

Or, comme les six nombres $zy'x''$, $xz'y''$, $yx'z''$, $yz'x''$, $zx'y''$, $xy'z''$ sont tels que le produit des trois premiers est égal au produit des trois autres, ces nombres satisfont aux deux équations (83) et (84).

2° *La condition est suffisante.* — En effet, supposons qu'elle soit remplie pour les six nombres d, e, f, g, h, k, c'est-à-dire que l'on ait

$$d^m + e^m + f^m = g^m + h^m + k^m, \quad def = ghk.$$

On pose

$$zy'x'' = d, \quad xz'y'' = e, \quad yx'z'' = f, \quad y'z'x'' = g, \\ zx'y'' = h, \quad xy'z'' = k,$$

et l'on en déduit

$$(85)\qquad x' = ghx, \quad y' = dey, \quad z' = egz,$$

$$(86)\qquad x'' = ghx, \quad y'' = ehy, \quad z'' = efz.$$

Ainsi, lorsque les équations (83) et (84) sont satisfaites par six nombres entiers d, e, f, g, h, k, on peut former une équation de la forme (76) qui admette une solution arbitraire (x, y, z) et deux autres solutions (x', y', z'), (x'', y'', z'') données par les formules (85) et (86).

Faisons une application du théorème au cas où m est égal à 3. A l'aide de l'identité en x, y qui a conduit aux formules (51) du n° 11, j'obtiens d'abord les six nombres 33, — 34, 1, 11, — 17, 6 pour lesquels on a

$$33^3 + (-34)^3 + 1 = 11^3 + (-17)^3 + 6^3,$$
$$33 \times (-34) \times 1 = 11 \times (-17) \times 6.$$

Je prends ensuite arbitrairement

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1,$$

et si l'on pose

$$d = 33, \quad e = -34, \quad f = 1, \quad g = 11, \quad h = -17, \quad k = 6,$$

les formules (85) et (86) donnent, après la suppression de facteurs communs,

$$x' = 1, \quad y' = -6, \quad z' = 2,$$
$$x'' = 11, \quad y'' = 34, \quad z'' = 2.$$

Mais, en calculant les valeurs de a, b, c par les formules (77), où l'on fait $m = 3$, on obtient l'équation

$$208X^3 - 7Y^3 = 215Z^3;$$

on est donc assuré d'avance que cette équation admet les trois solutions $(1, -1, 1)$, $(1, -6, 2)$, $(11, 34, 2)$.

Comme, jusqu'à présent, on ignore si le système des équations (83) et (84) peut être résolu pour des valeurs de m supérieures à 3, on ne sait pas non plus si, pour de pareilles valeurs de m, l'équation (76) peut avoir trois

solutions. Quoi qu'il en soit, le théorème précédent montre que la question de résoudre le système des deux équations (83) et (84) présente le plus grand intérêt.

THÉORÈME XIV. — *On peut résoudre en nombres entiers l'équation*

$$X^{4m} - a^2 Y^{4m} = Z^2,$$

ou, ce qui revient au même, le système des deux équations

$$(87) \qquad X^{2m} + aY^{2m} = U^2, \quad X^{2m} - aY^{2m} = V^2,$$

lorsque a *est de la forme* $\frac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{2m}}{2i}$ *(*i *représente* $\sqrt{-1}$*).*

En effet, si l'on pose

$$p + qi = (x+yi)^m, \quad p - qi = (x-yi)^m,$$

on a

$$p^2 + q^2 = (x^2+y^2)^m, \quad 2p = (x+yi)^m + (x-yi)^m,$$
$$2qi = (x+yi)^m - (x-yi)^m,$$
$$2(p^2 - q^2) = (x+yi)^{2m} + (x-yi)^{2m},$$

et, par suite,

$$4pq(p^2 - q^2) = \frac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{4m}}{2i}$$

$$p^2 - q^2 \pm 2pq = \frac{(1 \mp i)(x+yi)^{2m} + (1 \pm i)(x-yi)^{2m}}{2},$$

les signes supérieurs se correspondant dans les deux membres de l'équation précédente, ainsi que les signes inférieurs.

Cela posé, dans les équations (60) et (61) du n° 14, changeons x et y en p et q, puis remplaçons dans les équations ainsi transformées $p^2 + q^2$, $4pq(p^2 - q^2)$,

$p^2 - q^2 \pm 2pq$ par les expressions précédentes ; on a alors la double identité

$$(x^2+y^2)^{2m} \pm \frac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{4m}}{2i} \times 1^{2m}$$
$$= \frac{[(1 \mp i)(x+yi)^{2m} + (1 \pm i)(x-yi)^{2m}]^2}{2},$$

en faisant correspondre dans les deux membres les signes supérieurs ainsi que les signes inférieurs : le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si l'on admet qu'on ne peut satisfaire à l'équation $x^2 + y^2 = z^{2m}$ qu'en posant

$$x + yi = (p+qi)^{2m}, \quad x - yi = (p-qi)^{2m}, \quad z = p^2 + q^2,$$

on démontrera aisément que la condition donnée pour a (théorème XIV) est à la fois nécessaire et suffisante.

20. *Généralisation des nombres congruents.* — Lorsque m est égal à 1 dans les équations (87), le nombre a est dit *congruent* par rapport à deux carrés. Alors on peut convenir d'appeler *nombre congruent de l'ordre* m le nombre a, tel que les équations (87) puissent être satisfaites simultanément.

Si l'on fait d'abord m égal à 1 dans l'expression générale de a, on trouve $xy(x^2 - y^2)$ après la suppression du facteur carré 4 : c'est ce que l'on savait déjà. Si ensuite on fait m égal à 2, on trouve pour a, après avoir divisé par 2^4, $\frac{xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2]}{2}$. En donnant dans cette expression à x et y les valeurs 2 et 1, on obtient pour valeur de a le nombre 21, qui est le plus petit nombre congruent du second ordre.

VI. — Applications numériques des identités et des formules.

21. *Résolution de quelques équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$(88)\qquad X^3 + Y^3 = cZ^3.$$

On a vu que l'équation (88) peut être résolue lorsque c a l'une des formes suivantes :

$$x^3+y^3,\quad 2(x^6+3y^2),\quad x^3-y^3-3xy(x+2y),$$
$$xy(x+y),\quad x(y^3-x),\quad x^9+y^9-3x^3y^3(8x^3-y^3).$$

Si dans ces expressions on remplace x et y par les nombres entiers les plus simples, pris avec les signes + ou —, on reconnaît que l'équation (88) peut être résolue pour les valeurs de c égales à 6, 7, 9, 12, 15, 17, 19, 20, 22, 26, 28, 30, 37.

22. Je vais maintenant m'occuper de quelques équations particulières de la forme (88). Mais il importe de définir d'abord ce que j'entendrai par une *solution initiale* d'une équation numérique à trois inconnues. Je désignerai ainsi une solution de l'équation qui ne peut se déduire d'aucune autre à l'aide des formules qui donnent une suite de solutions correspondant à une première solution connue. Par exemple, on aura une solution initiale de l'équation (88) si cette solution ne peut pas s'obtenir à l'aide des formules (48) et (49), quelle que soit la solution prise pour point de départ.

1° $c = 19$. En substituant successivement, à la place de x et y, 3 et -2 dans $2(x^6+3y^2)$, 3 et 1 dans $x^3-y^3-3xy(x+2y)$, 1 et 2 dans

$$x^9-y^9-3x^3y^3(8x^3-y^3),$$

on voit, par les identités (39), (42), (47), que l'équation

$$X^3 + Y^3 = 19 Z^3$$

admet les trois solutions $(3, -2, 1)$, $(36, -17, 13)$, $(8, 1, 3)$.

Si maintenant, dans les formules (51) du nº **11**, on fait

$$x = 3, \quad y = -2, \quad z = 1,$$
$$x' = 8, \quad y' = 1, \quad z' = 3,$$

ou

$$x' = 36, \quad y' = -17, \quad z' = 13,$$

on obtient une quatrième solution $(5, 3, 2)$. Des deux solutions $(8, 1, 3)$, $(36, -17, 13)$ on déduirait ensuite, à l'aide des formules (51), une nouvelle solution $(92, 33, 35)$; mais celle-ci s'obtient immédiatement par les formules (48) en partant de la solution $(3, -2, 1)$. Les formules (51) donnent encore la solution $(13301, -1322, 498)$ comme conséquence des deux solutions $(5, 3, 2)$, $(36, -17, 13)$.

On pourrait continuer à chercher de nouvelles solutions au moyen des formules (51); mais, en arrêtant ici le calcul, je dis que les solutions $(8, 1, 3)$, $(3, -2, 1)$, $(36, -17, 13)$, $(13301, -1322, 498)$, $(5, 3, 2)$ sont, toutes les cinq, des solutions initiales.

En effet, on voit d'abord qu'aucune des quatre premières solutions ne peut être déduite des formules (49), qui ne donnent jamais une valeur paire pour une des inconnues x, y et une valeur impaire pour l'autre.

Je dis ensuite que, quelle que soit la solution prise pour point de départ, elle ne peut pas non plus être donnée par les formules (48). En effet, soient (x_n, y_n, z_n), $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ deux solutions consécutives données par les formules (48), et supposons que la solution

$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ soit d'abord identique avec la solution $(8, 1, 3)$; alors on aura

$$\frac{x_n(x_n^3 + 2y_n^3)}{-y_n(2x_n^3 + y_n^3)} = 8,$$

ou, en posant $\frac{x_n}{y_n} = m$,

$$m^4 + 16m^3 + 2m + 8 = 0.$$

Si la solution (8, 1, 3) était donnée par les formules (48), la dernière équation devrait avoir au moins une racine commensurable ; or, comme on reconnaît qu'elle n'en a aucune, on en conclut que la solution (8, 1, 3) ne peut être donnée par les formules (48). On voit, d'une manière toute semblable, que la deuxième, la troisième et la quatrième solution ne peuvent pas être données par les formules (48) ; car, s'il en était autrement, on devrait pouvoir résoudre en nombres commensurables les équations

$$2m^4 - 6m^3 + 4m - 3 = 0,$$
$$17m^4 - 72m^3 + 34m - 36 = 0,$$
$$1322m^4 - 26602m^3 + 2644m - 13301 = 0,$$

ce qui est impossible. Ainsi, il est prouvé que les quatre premières solutions sont des solutions initiales.

Je dis enfin qu'il en est de même de la cinquième solution. En effet, si elle était donnée par les formules (48) ou (49), on aurait à résoudre en nombres commensurables l'une ou l'autre des équations

$$3m^4 + 10m^3 + 6m + 5 = 0,$$
$$8m^9 + 3m^6 - 31m^3 - 8 = 0,$$

ce que l'on reconnaît impossible.

2° $c = 37$. En donnant à x, y les valeurs 4 et -3

dans x^3+y^3, 3 et -1 dans $x^3-y^3-3xy(x+2y)$, 2 et 1 dans $x^9+y^9-3x^3y^3(8x^3-y^3)$, on a les trois solutions $(4, -3, 1)$, $(19, 18, 7)$, $(10, -1, 3)$, et à l'aide des formules (51) on obtient les deux autres solutions $(1033, -33, 310)$, $(13683, -9587, 3568)$. On démontre, comme dans le cas précédent, que les cinq solutions peuvent être prises comme solutions initiales, et peut-être y en a-t-il encore d'autres.

23. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$aX^3+bY^3=cZ^3. \tag{89}$$

On sait que l'on peut toujours obtenir des équations de la forme (89) qui admettent deux solutions arbitraires, et une troisième solution qu'on en déduit à l'aide des formules (51). On conçoit que l'on puisse ainsi obtenir une infinité d'équations de la forme (89) admettant trois solutions initiales au moins. Si, par exemple, on forme l'équation

$$9X^3+7Y^3=2Z^3,$$

qui admet les deux solutions $(1, -1, 1)$, $(1, 1, 2)$ et une troisième solution $(3, 1, 5)$ qu'on en déduit par les formules (51), on vérifie par la méthode précédemment employée qu'aucune des trois solutions ne peut être donnée par les formules (50) Or, comme ces formules sont les seules formules générales qui donnent une nouvelle solution de l'équation (89) quand on en connaît une autre, les trois solutions précédentes sont des solutions initiales.

24. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$X^4+bY^4=Z^2. \tag{90}$$

On a vu (14) que l'équation (90) peut être résolue lorsque b est de l'une des formes $x^2 y (y+2x)$, $x(y^2-x)$, $-xy^2(x+y)$. En substituant dans les expressions précédentes pour x et y des nombres dont la valeur absolue est égale ou inférieure à 5, on reconnaît aisément que l'équation (90) peut être résolue pour les valeurs suivantes de b : $-2, 3, -5, -6, 8, -10, \pm 12, 14, 15, -17, 18, \pm 20, -21, -22$. Dans ces différents cas on trouve d'abord une première solution de l'équation (90) en se servant des identités qui correspondent aux diverses expressions de b, et l'on obtient ensuite d'autres solutions en appliquant les formules (64) et (67).

Dans les calculs que je viens d'indiquer, je n'ai pas rencontré d'équations à plusieurs solutions initiales, mais il n'est pas démontré qu'une pareille circonstance ne puisse pas se présenter.

25. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

(91) $$X^4 + Y^4 = cZ^2.$$

Je donnerai ici un seul exemple. Faisons a et b égaux à 1 dans l'identité (62); alors l'expression de c devient $(9x^4-y^4)^2 + 4x^4y^4$. Si l'on y fait d'abord x et y égaux à 1, on a c égal à 17×4, et l'on trouve ainsi que, pour $c = 17$, l'équation (91) a une première solution (1, 2, 1). Mais si ensuite on remplace, dans la même expression de c, x et y respectivement par 1 et 3, on a c égal à $2^2 \times 3^4 \times 17$, et l'on obtient encore, pour $c = 17$, la solution (13, 2, 41).

Maintenant on prouve par la méthode ordinaire que, quelle que soit la solution prise pour point de départ, les formules (67) ne donneront jamais les deux solutions précédentes. En effet, s'il en était autrement, on aurait

à résoudre en nombres commensurables l'une ou l'autre des deux équations

$$\frac{x(3y^8+6x^4y^4-x^8)}{y(3x^8+6x^4y^4-y^8)}=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{13}{2},$$

ce que l'on reconnaît impossible. Les deux solutions (1, 2, 1), (13, 2, 41) sont donc deux solutions initiales si l'on admet qu'on n'ait pas d'autres formules générales que les formules (69) pour la résolution de l'équation (91) (*).

26. *Résolution des équations numériques comprises dans les équations générales*

$$(92) \qquad aX^4+bY^4=cZ^2,$$

$$(93) \qquad aX^4+bY^4=cZ^4.$$

Les identités (69) et (74) ne conduisent le plus souvent qu'à de grandes valeurs de c, même dans le cas où a et b sont égaux à ± 1; mais, si l'on suppose $a=1$, $b=-1$, en prenant les différences des quatrièmes puissances des plus petits nombres entiers, on pourra arriver à des valeurs simples de c. Ainsi les identités numériques

$$2^4-1=15, \quad 3^4-1=5\times 2^4=10\times 2^3$$

montrent que, a et b étant respectivement égaux à 1 et -1, les équations (92) et (93) pourront être résolues, la première, lorsque c sera égal à 15 ou 10, la seconde, lorsque c sera égal à 15 ou 5.

On peut encore trouver autrement des équations de la forme (92) ou (93) dont la résolution en nombres

---

(*) Il y en a d'autres, comme je le ferai voir dans un autre article; mais je n'ai pas voulu m'en servir ici, parce qu'elles n'ont pas été obtenues par la méthode des identités.

entiers soit possible. Soient Z, X_1, Y_1, U_1, V_1 des polynômes donnés, le premier par la formule (25) et les autres par les formules (29).

Faisons $u = 0$ dans tous ces polynômes, résolvons par rapport à r et z les équations $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ et substituons dans X_1, Y_1, Z pour r et z leurs valeurs. Alors, si l'on remplace dans l'équation (28) U_1 et V_1 par zéro et X_1, Y_1, Z par leurs expressions, on tombe sur l'identité numérique

$$135 \times 3^4 - 4 \times 7^4 = 11^3,$$

c'est-à-dire que l'équation

$$135 X^4 - 4 Y^4 = Z^3$$

admet la solution (3, 7, 11).

On prouve d'une manière toute semblable que l'équation

$$X^4 - Y^4 = 84 Z^4$$

admet la solution (31, 17, 10). On arrive d'ailleurs à cette dernière solution en faisant x et y respectivement égaux à 2 et 1 dans l'identité (73).

VII. — Résumé et conclusion.

27. Lorsque dans l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$ on suppose m supérieur à 2, on peut considérer quatre cas principaux suivant que m et n sont respectivement égaux à 3 et 2, tous deux égaux à 3, m et n respectivement égaux à 4 et 2, m égal ou supérieur à 4 et n supérieur à 2.

Dans le premier cas, l'équation, comme on l'a vu, a toujours une infinité de solutions.

Dans le deuxième et le troisième cas, l'équation peut être impossible ou bien avoir une infinité de solutions; encore ce dernier point n'a pas été jusqu'ici rigoureusement établi, car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait

avoir démontré que, par l'emploi des formules qui permettent de déduire une solution d'une autre, on ne retombe jamais sur l'une des solutions précédentes.

Soit d'abord considérée l'équation $aX^3 + bY^3 = cZ^3$. Si l'on a trouvé plusieurs solutions initiales en faisant usage de certaines identités suivant la méthode que nous avons indiquée, on déduira de chacune des solutions obtenues une infinité d'autres solutions, à l'aide des formules (48) et (49) quand a et b seront égaux à 1, et en employant le système unique des formules (50) dans le cas général. D'ailleurs, toutes les fois que l'on aura obtenu deux solutions nouvelles, pourvu qu'elles ne soient pas deux solutions consécutives données par les formules (48) ou (50), on aura une solution nouvelle par l'emploi des formules (51). Mais, en procédant comme on vient de le dire, on ne pourra pas affirmer cependant que l'on a obtenu la solution complète, même en prenant une équation numérique particulière; car, pour être assuré qu'il en est ainsi, il faudrait avoir démontré que, dans l'exemple que l'on a choisi, le nombre des solutions initiales est fini et qu'on les a obtenues toutes.

Soit maintenant à résoudre l'équation

$$aX^4 + bY^4 = cZ^2.$$

Après avoir obtenu à l'aide d'identités une ou plusieurs solutions initiales, on en obtient une infinité d'autres, à l'aide des formules (64) et (67) lorsque, c étant égal à 1, l'un des nombres a ou b est aussi égal à 1, et en employant, dans le cas général, le système unique des formules (67).

Comme je l'ai déjà dit dans le n° 25, on peut, dans le cas général, trouver un deuxième système de formules de telle sorte que, dans ce cas comme dans le cas particulier, d'une solution connue on peut déduire

deux solutions nouvelles. Ce n'est pas tout, dans les *Comptes rendus* du 7 avril 1879, j'ai donné le moyen d'avoir des formules qui permettent d'obtenir quatre solutions nouvelles quand on en connaît deux. Mais en employant la méthode, même ainsi complétée, on n'est pas sûr encore d'avoir toutes les solutions de l'équation, et cela pour les mêmes raisons que dans le cas de l'équation cubique.

Nous arrivons maintenant au quatrième cas. Alors le nombre des solutions peut être égal à 0, 1 ou 2; mais jusqu'à présent on ignore si, même dans les cas les plus simples, c'est-à-dire pour les équations (93) et (94), le nombre des solutions peut être égal ou supérieur à 3. J'ai donné, il est vrai, dans le cas de l'équation (76), la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation puisse avoir trois solutions; mais je n'ai pu en faire l'application qu'à l'équation cubique.

28. Le travail que je termine ici ne sera pas inutile s'il montre bien, comme je l'espère, de quelle importance sont la recherche des identités et surtout la détermination des solutions initiales, dont on ne paraît pas s'être occupé jusqu'ici (*). On aura remarqué aussi toute la difficulté que présente la question de trouver la solution complète des équations dans le cas où elles ont une infinité de solutions. Il n'est donc pas étonnant que jusqu'ici aucun géomètre n'ait pu démontrer en toute rigueur que, dans le cas auquel nous venons de faire allusion, il avait la solution complète même d'une équation numérique particulière.

(*) D'après une Note de M. Lucas (*Nouvelles Annales*, novembre 1878) il faudrait faire exception pour M. Sylvester; mais jusqu'ici l'illustre géomètre n'a rien publié de ses recherches.

DÉVELOPPEMENTS SUR QUELQUES THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. S. REALIS.

THÉORÈME I. — *Tout nombre* N, *premier et de la forme* $4p+1$, *est la somme de deux carrés entiers.*

Scolie I. — Faisant

$$x = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2,$$
$$y = (\gamma - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2 - \gamma^2,$$

et assignant à α, β, γ des valeurs entières convenables, le nombre N peut toujours être représenté par l'expression $x^2 + y^2$, préalablement débarrassée de tout facteur carré commun à x^2 et y^2.

Ce complément remarquable du théorème énoncé est une conséquence de la résolution générale, en nombres entiers, de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$

dont il est question dans le scolie II.

Exemples :

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 1; \quad N = 5;$$
$$(9 + 16 - 1)^2 + (4 + 9 - 1)^2 = 12^2(2^2 + 1^2) = 12^2.5;$$
$$\alpha = 5, \quad \beta = 6, \quad \gamma = 1; \quad N = 13;$$
$$(25 + 36 - 1)^2 + (16 + 25 - 1)^2 = 20^2(3^2 + 2^2) = 20^2.13;$$
$$\alpha = 2, \quad \beta = 5, \quad \gamma = -3; \quad N = 17;$$
$$(4 + 25 - 9)^2 + (25 + 64 - 9)^2 = 20^2(1^2 + 4^2) = 20^2.17;$$

$$\alpha = 10, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 3; \quad N = 29;$$

$$(100 + 49 - 9)^2 + (49 + 16 - 9)^2 = 28^2(5^2 + 2^2) = 28^2 . 29;$$

$$\alpha = 12, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 5; \quad N = 37;$$

$$(144 + 49 - 25)^2 + (49 + 4 - 25)^2 = 28^2(6^2 + 1^2) = 28^2 . 37;$$

. . . .

Remarques. — 1° Mettant les valeurs de x et y sous la forme

$$x = \alpha^2 + \beta^2 - (-\gamma)^2,$$
$$y = (\gamma - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2 - (-\gamma)^2,$$

et prenant la somme algébrique des racines des six carrés qui figurent dans ces expressions, on reconnaît que cette somme est égale à zéro. Cette particularité curieuse, et digne d'être signalée, peut être rapprochée de certaines propriétés analogues, relatives aux quatre carrés qui concourent à la formation d'un nombre entier quelconque, et pour lesquelles nous renvoyons à un article inséré aux *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XII, p. 212.

2° La décomposition qui vient d'être indiquée n'est pas une propriété exclusive des nombres premiers; d'après le scolie II qui va suivre, elle a lieu, d'une manière générale, pour tout nombre N qui est la somme de deux carrés premiers entre eux; c'est-à-dire qu'elle a lieu pour tout nombre impair dont aucun diviseur n'est de la forme $4p - 1$, et pour son double. Mais, le cas des nombres premiers étant le plus intéressant à considérer, il nous a paru opportun de l'énoncer d'abord à part, en le rattachant à l'un des plus importants théorèmes de Fermat.

Exemples :

$$\alpha = 3,\quad \beta = 1,\quad \gamma = 1;\quad N = 10;$$
$$(9 + 1 - 1)^2 + (4 + 0 - 1)^2 = 3^2(3^2 + 1^2) = 3^2.10;$$

$$\alpha = 8,\quad \beta = 7,\quad \gamma = 1;\quad N = 25;$$
$$(64 + 49 - 1)^2 + (49 + 36 - 1)^2 = 28^2(4^2 + 3^2) = 28^2.25;$$

$$\alpha = 5,\quad \beta = 3,\quad \gamma = 2;\quad N = 26;$$
$$(25 + 9 - 4)^2 + (9 + 1 - 4)^2 = 6^2(5^2 + 1^2) = 6^2.26;$$

$$\alpha = 4,\quad \beta = 3,\quad \gamma = -1;\quad N = 34;$$
$$(16 + 9 - 1)^2 + (25 + 16 - 1)^2 = 8^2(3^2 + 5^2) = 8^2.34;$$

$$\alpha = 4,\quad \beta = 1,\quad \gamma = -3;\quad N = 50;$$
$$(16 + 1 - 9)^2 + (49 + 16 - 9)^2 = 8^2(1^2 + 7^2) = 8^2.50;$$

$$\alpha = 0,\quad \beta = 9,\quad \gamma = 7;\quad N = 65;$$
$$(0 + 81 - 49)^2 + (49 + 4 - 49)^2 = 4^2(8^2 + 1^2) = 4^2.65;$$

....

Ajoutons, comme renseignement sur lequel nous n'insisterons pas ici, que, une fois la décomposition en deux carrés effectuée pour un nombre donné, la détermination des entiers α, β, γ et, par suite, du facteur commun à x^2 et y^2, s'en déduit par un procédé direct.

Scolie II. — On a, par identité,

$$\begin{aligned}&(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 + [(\gamma - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2 - \gamma^2]^2 \\ &= [\alpha^2 + (\alpha - \gamma)^2 - (\alpha - \beta)^2]^2 + [\beta^2 + (\beta - \gamma)^2 - (\beta - \alpha)^2]^2.\end{aligned}$$

Cette formule est susceptible d'applications importantes. D'abord, elle peut être souvent utile, lorsqu'il s'agit de constater qu'un nombre impair, qui se présente sous la forme indiquée au premier membre (dégagée de ses facteurs carrés), admet des diviseurs. On

sait, en effet, qu'un tel nombre ne saurait être premier, s'il est décomposable de plus d'une manière en deux carrés.

Par exemple, pour $\alpha = 35$, $\beta = 24$, $\gamma = -25$, les deux membres de la formule sont, respectivement,

$$(1225 + 576 - 625)^2 + (3600 + 2401 - 625)^2 = 168^2(7^2 + 32^2) = 168^2 . 1073,$$

$$(1225 + 3600 - 121)^2 + (576 + 2401 - 121)^2 = 168^2(28^2 + 17^2) = 168^2 . 1073,$$

et, comme ils présentent deux décompositions différentes, on en conclut que le nombre 1073 n'est pas premier. Cependant, si l'on avait pris $\alpha = 14$, $\beta = 39$, $\gamma = -25$, la même formule n'aurait donné que le résultat

$$156^2(7^2 + 32^2) = 156^2 . 1073,$$

ce qui ne nous apprend rien sur la nature du nombre 1073, en tant que premier ou composé.

Pour

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2^{2m+1} + 2^{m+1}, \quad \gamma = 2^{2m+1} - 1,$$

il vient, après suppression des facteurs communs, l'égalité

$$(2^{2m+1})^2 + 1^2 = (2^{2m+1} - 1)^2 + (2^{m+1})^2,$$

et l'on en déduit que le nombre $2^{4m+2} + 1$, où m est un entier plus grand que zéro, n'est jamais premier. En effet, ce nombre (à part qu'il est évidemment divisible par 5) est égal au produit

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1),$$

ainsi que la remarque en a été faite dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV, p. 86 et 98). Complétons ce résultat, en inscrivant l'égalité évidente

$$2^{2m+1} \pm 2^{m+1} + 1 = (2^m)^2 + (2^m \pm 1)^2,$$

par laquelle chaque facteur du produit considéré se réduit à une somme de deux carrés, ainsi que cela doit être.

Mais ce qui rend l'identité ci-dessus surtout importante, c'est qu'elle résout complètement, et en employant trois seules variables, l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$

traitée jadis par Le Besgue à l'aide de principes entièrement différents (voir les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. VII, p. 37; *voir* aussi, pour la solution usuelle, le *Bulletin de Bibliographie*, etc., de Terquem, t. III, p. 86). Nous nous bornons ici à énoncer cette propriété, que l'on peut démontrer en toute rigueur, et dont la proposition qui fait l'objet du scolie I est une conséquence directe. On verra plus bas, dans les observations qui suivent le théorème III, que l'identité considérée, et l'équation qu'elle sert à résoudre, sont des cas particuliers de relations plus générales.

Théorème II. — *Tout nombre* N *appartenant à l'une des formes*

$$4p + 1,\ 4p + 2,\ 8p + 3,$$

et n'ayant pas de facteurs carrés, est la somme de trois carrés premiers entre eux.

Scolie. — Faisant

$$x = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \varepsilon^2,$$
$$y = (\delta - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 + (\delta - \gamma)^2 - (\delta - \varepsilon)^2 - \delta^2,$$
$$z = (\varepsilon - \alpha)^2 + (\varepsilon - \beta)^2 + (\varepsilon - \gamma)^2 - (\varepsilon - \delta)^2 - \varepsilon^2,$$

et déterminant convenablement les entiers α, β, γ, δ, ε, le nombre N peut toujours être représenté par l'expression $x^2 + y^2 + z^2$, préalablement débarrassée des facteurs communs à x^2, y^2, z^2.

Ce complément du théorème cité résulte de la résolution générale, que nous allons exposer, d'une équation indéterminée à six inconnues.

Il est bien entendu que l'un des trois carrés considérés peut être nécessairement nul, ainsi que cela a lieu, par exemple, pour les nombres 5, 10, 13, 37.

Exemples :

$$\alpha=3,\quad \beta=1,\quad \gamma=4,\quad \delta=1,\quad \varepsilon=1;\quad N=6;$$
$$(9+1+16-1-1)^2+(4+0+9-0-1)^2$$
$$+(4+0+9-0-1)^2=12^2(2^2+1^2+1^2)=12^2.6;$$
$$\alpha=3,\quad \beta=4,\quad \gamma=6,\quad \delta=2,\quad \varepsilon=3;\quad N=10;$$
$$(9+16+36-4-9)^2+(1+4+16-1-4)^2$$
$$+(0+1+9-1-9)^2=16^2(3^2+1^2+0)=16^2.10;$$
$$\alpha=0,\quad \beta=2,\quad \gamma=1,\quad \delta=1,\quad \varepsilon=1;\quad N=11;$$
$$(0+4+1-1-1)^2+(1+1+0-0-1)^2$$
$$+(1+1+0-0-1)^2=3^2+1^2+1^2=11;$$
$$\alpha=0,\quad \beta=5,\quad \gamma=3,\quad \delta=1,\quad \varepsilon=3;\quad N=13;$$
$$(0+25+9-1-9)^2+(1+16+4-4-1)^2$$
$$+(9+4+0-4-9)^2=8^2(3^2+2^2+0)=8^2.13;$$
$$\alpha=6,\quad \beta=1,\quad \gamma=2,\quad \delta=1,\quad \varepsilon=2;\quad N=14;$$
$$(36+1+4-1-4)^2+(25+0+1-1-1)^2$$
$$+(16+1+0-1-4)^2=12^2(3^2+2^2+1^2)=12^2.14;$$

....

Remarque. — Plus généralement : tout nombre N, qui est la somme de trois carrés entiers, peut être représenté, en fonction des entiers α, β, γ, δ, ε, par l'expression ci-dessus, dont les termes ont été préalablement dégagés de tout facteur commun, étranger à la composition de N.

Cette proposition remarquable est une conséquence de l'identité

$$x^2+y^2+z^2=t^2+u^2+v^2,$$

dans laquelle x, y, z sont tels qu'il a été dit, et t, u, v sont exprimés par

$$t = \alpha^2 + (\alpha - \delta)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2 - (\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \gamma)^2,$$
$$u = \beta^2 + (\beta - \delta)^2 + (\beta - \varepsilon)^2 - (\beta - \alpha)^2 - (\beta - \gamma)^2,$$
$$v = \gamma^2 + (\gamma - \delta)^2 + (\gamma - \varepsilon)^2 - (\gamma - \alpha)^2 - (\gamma - \beta)^2.$$

On peut démontrer rigoureusement, en effet, que cette identité renferme toutes les solutions entières de l'équation indéterminée qu'elle établit entre les variables t, u, v, x, y, z.

Théorème III. — *Tout nombre entier est la somme de quatre carrés entiers* (ou d'un moindre nombre).

Scolie. — Toutes les solutions entières, distinctes, de l'équation indéterminée à huit inconnues

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,$$

s'obtiennent au moyen des formules

$$x_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2,$$
$$x_2 = (\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \alpha_4)^2$$
$$- (\beta_1 - \beta_2)^2 - (\beta_1 - \beta_3)^2 - \beta_1^2,$$
$$x_3 = (\beta_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 + (\beta_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \alpha_4)^2$$
$$- (\beta_2 - \beta_1)^2 - (\beta_2 - \beta_3)^2 - \beta_2^2,$$
$$x_4 = (\beta_3 - \alpha_1)^2 + (\beta_3 - \alpha_2)^2 + (\beta_3 - \alpha_3)^2 + (\beta_3 - \alpha_4)^2$$
$$- (\beta_3 - \beta_1)^2 - (\beta_3 - \beta_2)^2 - \beta_3^2,$$
$$u_1 = \alpha_1^2 + (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \beta_3)^2$$
$$- (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_1 - \alpha_3)^2 - (\alpha_1 - \alpha_4)^2,$$
$$u_2 = \alpha_2^2 + (\alpha_2 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + (\alpha_2 - \beta_3)^2$$
$$- (\alpha_2 - \alpha_1)^2 - (\alpha_2 - \alpha_3)^2 - (\alpha_2 - \alpha_4)^2,$$
$$u_3 = \alpha_3^2 + (\alpha_3 - \beta_1)^2 + (\alpha_3 - \beta_2)^2 + (\alpha_3 - \beta_3)^2$$
$$- (\alpha_3 - \alpha_1)^2 - (\alpha_3 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2,$$
$$u_4 = \alpha_4^2 + (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_4 - \beta_2)^2 + (\alpha_4 - \beta_3)^2$$
$$- (\alpha_4 - \alpha_1)^2 - (\alpha_4 - \alpha_2)^2 - (\alpha_4 - \alpha_3)^2,$$

en y attribuant aux variables α_h, β_k des valeurs convenables, et en supprimant les facteurs communs aux valeurs des x et des u.

Cette proposition comprend les énoncés relatifs aux équations mentionnées dans les scolies précédents, et n'est elle-même qu'un cas particulier d'une proposition plus générale. Combinée avec le théorème III, elle entraîne ce corollaire que, les x étant de la forme indiquée, tout nombre entier N peut être représenté par l'expression $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, préalablement débarrassée des facteurs carrés communs à ses quatre termes, et étrangers à la composition de N.

Les formules proposées vérifient l'équation ci-dessus par identité : sur cela il ne peut y avoir de doute ; elles donnent donc une infinité de solutions entières. Ce que nous n'avons pas encore démontré, c'est que tous les cas particuliers sont compris dans l'identité en question. Mais les preuves à l'appui de la généralité absolue de notre solution, et les moyens de résoudre la question inverse, c'est-à-dire de déterminer les α et les β d'après les valeurs des x et des u supposées connues, ne seront pas développés ici. Ces explications, rattachées à des questions plus générales, feront partie d'un travail spécial, où nous nous réservons d'exposer quelques considérations nouvelles sur la résolution des équations indéterminées.

Note. — On voit assez, par ce qui précède, quelles sont les formules qui vérifient par identité l'équation indéterminée à $2m$ inconnues

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2,$$

et comment elles se prêtent à préciser la forme des m carrés dans lesquels un nombre donné peut être décom-

posé. Mais les décompositions des entiers en deux, trois et quatre carrés, étant celles dont on a le plus souvent à s'occuper, et les nouvelles formules offrant surtout de l'intérêt par leur association avec les théorèmes concernant la transformation des formes linéaires en formes quadratiques, nous ne nous arrêterons pas ici sur la généralisation facile dont nous parlons.

Il y a cependant un cas particulier qui a une importance propre, et que nous ne devons pas omettre de signaler : c'est celui qui se rapporte aux nombres de la forme $X^2 + nY^2$.

L'identité

$$x^2 + ny^2 = u^2 + nv^2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} x &= \alpha^2 + n\beta^2 - n\gamma^2, \\ y &= (\gamma - \alpha)^2 + n(\gamma - \beta)^2 - \gamma^2, \\ u &= \alpha^2 + n(\alpha - \gamma)^2 - n(\alpha - \beta)^2, \\ v &= \beta^2 + n(\beta - \gamma)^2 - (\alpha - \beta)^2, \end{aligned}$$

est un cas particulier de la relation générale dont on a fait mention. Elle renferme la totalité des solutions entières de l'équation indéterminée qu'elle établit entre les variables u, v, x, y; et l'on en peut déduire des conséquences importantes pour l'analyse numérique.

Cette identité s'emploie avec avantage, entre autres applications, pour mettre en évidence que certains nombres, qui se présentent sous la forme de son premier membre, sont susceptibles d'être mis d'une manière différente sous la même forme, et par conséquent ne sont pas premiers. Aucun nombre premier, en effet, ne saurait être compris plus d'une fois dans la forme $X^2 + nY^2$, si n est positif.

Prenant, par exemple, dans le cas de $n = 3$,

$$\alpha = 3.2^{2m-1},\quad \beta = 3.2^{2m-1} - 1,\quad \gamma = 2^{2m} - 2^{m} - 1,$$

on arrive, après suppression des facteurs communs, au résultat

$$(2^{2m} - 1)^2 + 3(2^m)^2 = (2^{2m-1} + 1)^2 + 3(2^{2m-1})^2,$$

et il s'ensuit que le nombre $2^{4m} + 2^{2m} + 1$, où m est un entier positif, n'est jamais premier. On a effectivement

$$\begin{aligned} 2^{4m} + 2^{2m} + 1 &= (2^{2m} + 2^m + 1)(2^{2m} - 2^m + 1) \\ &= [(2^{m-1} + 1)^2 + 3(2^{m-1})^2][(2^{m-1} - 1)^2 + 3(2^{m-1})^2], \end{aligned}$$

à quoi l'on peut ajouter que ce nombre est toujours divisible par 3.

NOTE SUR LA SÉRIE

$$(1)\qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$$

PAR M. LIONNET.

I. On sait que cette série, que nous pouvons mettre sous la forme

$$(2)\quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots,$$

en considérant chaque binôme entre parenthèses comme un seul terme, est convergente, et qu'elle a pour limite le logarithme népérien du nombre 2.

II. Cela étant, nous allons démontrer que la série

$$(3)\quad \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots,$$

qu'on déduit de la série (1) en faisant suivre son premier terme positif de ses deux premiers termes négatifs, puis son second terme positif de ses troisième et quatrième termes négatifs, etc., est aussi convergente, et qu'elle a pour limite $\frac{1}{2}\log 2$.

En réduisant à un seul les deux premiers termes de chaque trinôme entre parenthèses, la série (3) prend la forme

$$(4)\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)+\ldots,$$

et, comme chacun des termes de cette série est la moitié du terme de même rang dans la série (2) qui est convergente et a pour limite $\log 2$ (I), il en résulte que la série (4), et par suite la série (3), est aussi convergente, et qu'elle a pour limite $\frac{1}{2}\log 2$.

Cet exemple est, je crois, le plus simple qu'on puisse donner de l'influence que peut avoir sur la valeur d'une série le changement introduit dans l'ordre de ses termes.

III. On sait que la série

$$(5)\quad \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\ldots,$$

qu'on déduit de la série (1) en faisant suivre ses deux premiers termes positifs de son premier terme négatif, puis ses troisième et quatrième termes positifs de son second terme négatif, etc., est convergente, et qu'elle a pour limite $\frac{3}{2}\log 2$. Voici comment on peut le démontrer au moyen des séries (2) et (4).

On voit immédiatement que, dans la somme des deux premiers termes de la série (2) et du premier terme de la série (4), les fractions $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ se détruisent, tandis que les deux fractions égales à $-\frac{1}{4}$ donnent la fraction $-\frac{1}{2}$, d'où il suit que cette somme devient le premier terme de la série (5). On voit de même que la somme des troisième et quatrième termes de la série (2) et du second terme de la série (4) est égale au deuxième terme de la série (5), et ainsi de suite, de sorte que, en général, la somme des $2n$ premiers termes de la série (2) et des n premiers termes de la série (4) est égale à la somme des n premiers termes de la série (5). Or, quand n croît indéfiniment, les deux premières sommes convergent (I et II), vers les limites $\log 2$ et $\frac{1}{2}\log 2$; donc la troisième somme ou la série (5) converge en même temps vers

$$\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 \text{ ou } \frac{3}{2}\log 2.$$

IV. Enfin la série

$$(6)\quad \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\ldots,$$

qu'on déduit de la série (1) en faisant suivre son premier terme positif de son premier terme négatif, puis ses deuxième et troisième termes positifs de son deuxième terme négatif, puis ses quatrième, cinquième et sixième termes positifs de son troisième terme négatif, etc., est divergente.

On sait 1° que la somme des n premiers nombres positifs égale $\frac{1}{2}n(n+1)$, 2° que la somme des n premiers

nombres impairs égale n^2. 3° nous allons démontrer ce théorème, moins généralement connu que les deux précédents :

Si l'on partage la suite des nombres impairs 1, 3. 5,... *en n tranches à partir de la gauche, de sorte que la première contienne un terme, la deuxième deux, la troisième trois, etc., la somme des n termes de la* $n^{ième}$ *tranche égalera* n^3.

En effet, (1°) le nombre total des termes des n premières tranches égale $\frac{1}{2}n(n+1)$, et celui des termes des $n-1$ premières tranches égale $\frac{1}{2}n(n-1)$; donc la somme des n termes de la $n^{ième}$ tranche égale (2°) la différence des carrés des deux nombres de termes précédents ou

$$\frac{1}{4}n^2[(n+1)^2-(n-1)^2]=n^3.$$

4° On sait que la moyenne arithmétique $\frac{s}{n}$ de n nombres positifs et *inégaux entre eux* excède leur moyenne géométrique $\sqrt[n]{p}$, d'où il résulte (5°) que la somme I des inverses de n nombres positifs et *inégaux entre eux* excède le quotient de n^2 par s. En effet, on a (4°)

$$I>\frac{n}{\sqrt[n]{p}}>\frac{n}{\left(\frac{s}{n}\right)}=\frac{n^2}{s}.$$

Cela étant, on voit que, n désignant le nombre des termes positifs entre deux parenthèses quelconques dans la série (6), le terme général de cette série excède

$$\frac{n^2}{n^3}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n},$$

qui est le terme général de la série divergente

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots;$$

donc, à plus forte raison, la série (6) est aussi divergente.

Remarque. — M. Laisant, dans sa réponse (p. 330) à la question (1294) que j'ai proposée, a donné deux démonstrations du théorème (5°), dont la seconde, qui m'était inconnue, est directe et très rigoureuse, mais me paraît moins simple que la première.

MÉTHODE DIRECTE POUR CALCULER LA SOMME DES PUISSANCES α DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

Par M. Georges DOSTOR.

[suite (*)].

Sommes des dix premières puissances des n premiers nombres entiers.

4. Nous avons appliqué la méthode exposée page 459 à la sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers, depuis la première jusqu'à la dixième inclusivement. Nous avons trouvé les formules suivantes :

$$\Sigma n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\Sigma n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\Sigma n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVIII, p. 459.

$$\Sigma n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

$$\Sigma n^6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$

$$\Sigma n^7 = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$

$$\Sigma n^8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$$

$$\Sigma n^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$

$$\Sigma n^{10} = \frac{1}{66} n(n+1)(2n+1)$$
$$\times(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5).$$

La comparaison de ces formules conduit à des résultats qui méritent d'être signalés.

5. Nous obtenons d'abord les six égalités

$$\text{(I)} \qquad \Sigma n^2 + \Sigma n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2),$$

$$\text{(II)} \qquad \Sigma n^2 - \Sigma n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1),$$

$$\Sigma n^3 + \Sigma n = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+n+2),$$

$$\text{(III)} \qquad \Sigma n^3 - \Sigma n = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2),$$

$$\Sigma n^3 + \Sigma n^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

$$\Sigma n^3 - \Sigma n^2 = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

Nous voyons par les formules (I), (II) et (III) que :

1° *La somme des carrés des n premiers nombres en-*

tiers, ajoutée à la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est n.

2° *La somme des carrés des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est n — 1.*

3° *La somme des cubes des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au quart du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est n — 1.*

6. Nous trouvons ensuite que

$$\Sigma n^4 - \Sigma n = \frac{1}{30}(n-1)n(n+1)(6n^2+15n+16),$$

$$(\text{IV}) \qquad \Sigma n^4 - \Sigma n^2 = \frac{1}{10}(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1),$$

$$\Sigma n^4 - \Sigma n^3 = \frac{1}{60}(n-1)n(n+1)(12n^2+15n+2).$$

Nous concluons de l'égalité (IV) que :

La somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme des carrés de ces n mêmes nombres, est égale au produit de 2n + 1 par le dixième du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est n — 1.

7. Si nous divisons (IV) par (III), nous aurons

$$(\text{V}) \qquad \frac{\Sigma n^4 - \Sigma n^2}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \frac{2}{5}(2n+1).$$

Donc, *si n est égal à un multiple de* 5 *plus* 2, *la différence entre la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des carrés de*

ces n mêmes nombres est divisible par la différence entre la somme des cubes des n premiers nombres entiers et la somme de ces n mêmes nombres.

8. Il nous vient encore

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma n^4 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{10}\right]\Sigma n^2,$$

$$\text{(VII)} \qquad \Sigma n^5 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{6}\right]\Sigma n^3.$$

Mais le produit $(n-1)(n+2)$ est toujours divisible par 2; donc :

1° *Si n égale un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 plus 3, la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.*

2° *Si n égale un multiple de 3 plus 1, la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.*

9. Comme on a

$$\text{(VIII)} \qquad \Sigma n^5 - \Sigma n^3 = \frac{1}{6}(n-1)n^2(n+1)^2(n+2),$$

on voit, au moyen de (III), que

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\Sigma n^5 - \Sigma n^3}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \frac{2}{3}n(n+1).$$

Donc, *si n est un multiple de 3 ou un multiple de 3 moins 1, la différence entre la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des cubes de ces n mêmes nombres est divisible par la différence entre la somme de ces cubes et la somme des n mêmes nombres.*

10. Nous avons

$$\frac{\Sigma n^6}{\Sigma n^2} = \frac{1}{7}(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$$

Or, si n est un multiple de 7 plus 1 et égal à $7p + 1$, le facteur $3n^4 + 6n^3 - 3n + 1$ sera divisible par 7, car le reste de la division de

$$3(7p + 1)^4 + 6(7p + 1)^3 - 3(7p + 1) + 1$$

par 7 est le même que celui que l'on obtient en divisant par 7 la somme

$$3 + 6 - 3 + 1 = 7$$

des restes. Donc :

Si n est un multiple de 7 plus 1, la somme des sixièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.

11. Puisque

$$\begin{aligned} \Sigma n^7 &= \frac{1}{24} n^2(n + 1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 + 4n + 2) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} n^2(n + 1)^2\left[\frac{3}{2} n^2(n + 1)^2 - 2n(n + 1) + 1\right], \end{aligned}$$

il vient

$$\Sigma n^7 = \frac{1}{3}\Sigma n^3(6\Sigma n^3 - 4\Sigma n + 1).$$

Mais, si n est un multiple de 3 plus 1, $4\Sigma n - 1$ sera divisible par 3. Donc :

Si n est un multiple de 3 plus 1, la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.

12. D'autres relations plus ou moins simples peuvent se déduire de nos formules.

Nous citerons encore la suivante,

$$(\text{X}) \qquad 2(\Sigma n^3)^2 = \Sigma n^5 + \Sigma n^7,$$

qui ne manque pas d'intérêt.

CALCUL D'UN DÉTERMINANT;

PAR M. H. LEMONNIER.

Calcul du déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & . & \ldots & n & 1 \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n & \ldots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Premier procédé :

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & \ldots & \ldots & 1-n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & 1 & 1-n & \ldots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & \ldots & 0 & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & . & \ldots & 0 & -n & n \\ 1 & 0 & 0 & . & \ldots & -n & n & 0 \\ . & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & -n & n & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -n & 2n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -n & 2n & -n \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & -n & 2n & -n & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -n & 2n & -n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -n & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & 2n & -n & \cdots & \cdots & 0 \\ -n & 2n & -n & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -n & 2n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -n & 2n & -n \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & 2n & -n & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2n & -n & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

l'ordre des déterminants s'abaissant d'une unité.

Le premier de ces derniers déterminants est

$$n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le second est

$$n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 3 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 3 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

l'ordre devenant $n-2$.

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 2 & -1 & -2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 2 & -2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{n-3},$$

l'ordre devenant $n-3$.

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & 10 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 2 & -5 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{n-3+n-4},$$

déterminant d'ordre $n-4$.

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & 15 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 2 & -9 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & -1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{n-3+n-4+n-5},$$

d'ordre $n-5$.

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \dfrac{n(n-1)}{2} \end{vmatrix} (-1)^{n-3+\ldots+2}$$

$$= -\, n^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}$$

$$= -\, n^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}};$$

par conséquent,

$$\mathrm{N} = n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + n^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= n^{n-2}\,\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Il se présente là deux suites de nombres qui sont

$$0,\quad 1,\quad 2.1+1=3,\quad 2.3+0=6,$$
$$2.6-2=10,\quad 2.10-5=15,\quad 2.15-9=21,\ \ldots;$$
$$(-1)1+1=0,\quad (-1)3+1=-2,\quad (-1)6+1=-5,$$
$$(-1)10+1=-9,\quad (-1)15+1=-14,\ \ldots;$$

ceux de la première et de la deuxième ligne ont pour expression générale $\frac{n(n-1)}{2}$ pour $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$ ceux de la troisième et de la quatrième ligne $-\frac{n(n-3)}{2}$, et l'on a bien

$$2\,\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

et

$$(-1)\frac{n(n-1)}{2} + 1 = -\,\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Deuxième procédé plus simple :

$$\mathrm{N} = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & . & \ldots & n & 1 \\ \ldots\ldots & . & . & \ldots & \ldots\ldots & . \\ n-1 & n & . & \ldots & n-3 & 1 \\ n & 1 & . & \ldots & n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots\cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \cdots\cdots & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdot \\ n-1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -n & n & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & -n & n & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & -n & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

d'ordre $n-1$.

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

d'ordre $n-2$.

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{n-1+n-2+\ldots+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On trouve de même que

$$N_{p,n} = \begin{vmatrix} p+1 & \ldots & p+n \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p+n & \ldots & p+n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & \ldots & p+n-1 & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ p+n & \ldots & p+n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & 1-n & 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ p+n-1 & 1 & 1-n & \ldots & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & \ldots & . & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & . & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & . & \ldots & \ldots & -n & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & . & \ldots & -n & n & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 1 & 0 & -n & n & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & . \; . & \ldots & \ldots & -n & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -n & 2n & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -n & 2n & -n & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & -n & 2n & -n & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-2} \left|\begin{array}{ccccccc} 1 & . & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & . & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & . & \dots & \dots & -1 & 2 & 0 \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array}\right|,$$

d'ordre $n-1$.

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le déterminant est nul seulement au cas de $p = -\frac{n+1}{2}$, alors que la somme des termes dans une ligne ou une colonne est nulle.

La valeur pour $p = -1$ est à remarquer.

Si l'on multiplie tous les éléments par q, le déterminant est multiplié par q^n; qu'on change ensuite pq en p, on obtient

$$\left|\begin{array}{cccc} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{array}\right|$$

$$= q^n \left[n\frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= q^{n-1}\left(p + \frac{n+1}{2} q\right) n^{n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Teorica e pratica dei logaritmi di addizione e di sottrazione, di *Zecchini Leonelli;* esposta con tavole calcolate a sette decimali, dall'ingegnere *Pietro Caminati,* Prof. titolare di Matematica nel R. Istituto tecnico di Sondrio.

Estratto dal Periodico la *Rivista di Matematica elementare;* serie II, volume I.

Novara, tipografia della Rivista di contabilità (1879).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1323

(voir 2e série, t. XVII, p. 383);

PAR M. LIONNET.

Donner toutes les solutions du problème suivant :

Disposer également les neuf premiers nombres 1, 2, 3, ..., 9 *sur les côtés d'un triangle équilatéral, comme l'indique cette figure* ⁘ , *de façon que les trois sommes des quatre nombres placés sur chaque côté soient égales entre elles, ainsi que les trois sommes de leurs carrés.* (F. PROTH.)

En désignant par s_1 la somme des trois nombres x, y, z placés aux sommets du triangle, par s_2 la somme de leurs carrés, par S_1 la somme des nombres 1, 2, 3, ..., 9, par S_2 celle de leurs carrés, par c_1 la somme des quatre nombres placés sur chaque côté du triangle et par c_2 celle de leurs carrés, nous aurons

$$S_1 = 45, \quad S_2 = 285, \quad 3c_1 = 45 + s_1, \quad 3c_2 = 285 + s_2,$$

d'où l'on conclut que s_1 et s_2 sont multiples de 3, et que, pour chaque système de valeurs de x, y, z satisfaisant à ces deux conditions, on obtiendra les valeurs correspondantes de c_1 et c_2 en augmentant 15 et 95 respectivement des tiers de s_1 et s_2. Cela étant, observons que, suivant qu'un nombre est ou non multiple de 3, son carré est de la forme $3n$ ou $3n+1$, d'où il suit que,

pour que s_2 soit multiple de 3, il faut que x, y, z soient multiples de 3 ou chacun de la forme $3n \pm 1$.

Soit donc d'abord $x = 3, y = 6, z = 9$, ce qui donne $c_1 = 21$ et $c_2 = 137$. Comme la somme des carrés de 8 et 9 excède 137, on ne peut placer 8 qu'entre 3 et 6, et, pour compléter la somme $c_1 = 21$, il faut aussi placer 4 entre 3 et 6; or la somme des carrés des nombres 6, 8, 4, 3 égale $125 < 137$; donc 8 n'a aucune position possible entre deux des nombres 3, 6, 9, et, par suite, il faut exclure le cas où x, y, z sont multiples de 3.

On reconnaît immédiatement que, parmi tous les systèmes de trois des six nombres 1, 2, 4, 5, 7, 8, 1, 4, 7 et 2, 5, 8 sont les seuls pour lesquels s_1 est multiple de 3. Cela étant, on prouvera que le système 1, 4, 7 est inadmissible en montrant, comme pour 8 dans le système 3, 6, 9, que 9 n'a aucune position possible entre deux quelconques des nombres 1, 4, 7. Enfin, pour le système 2, 5, 8, on voit d'abord que 9 ne peut être placé qu'entre 2 et 5, puis que 7 ne peut être placé qu'entre 2 et 8. La position des quatre autres chiffres se trouve ainsi déterminée : 4 entre 2 et 5, 3 entre 2 et 8, puis 1 et 6 entre 5 et 8. On reconnaît d'ailleurs que $c_1 = 20$ et $c_2 = 126$ pour chacun des trois côtés du triangle.

Sans tenir compte de la condition que la somme c_1 soit constante pour chacun des trois côtés, on pourrait démontrer, au moyen de calculs un peu plus longs, que la solution précédente est encore la seule possible. Enfin, abstraction faite, dans le problème proposé, de la condition que la somme c_2 soit la même pour chaque côté, on trouve d'abord assez rapidement que le nombre des systèmes de trois chiffres significatifs, dont la somme s_1 est multiple de 3, égale trente, puis que, parmi ces derniers, il faut en exclure vingt pour chacun desquels la différence $c_1 - s_1$ est exprimée par un chiffre significatif

autre que ceux déjà placés aux sommets. Alors il ne reste plus que les dix systèmes de trois chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 4, 7, 2, 5, 8,
3, 6, 9, 3, 5, 7, 1, 5, 9, 2, 3, 7, 3, 7, 8

qui puissent être placés aux sommets du triangle, lesquels donnent lieu aux dix-huit solutions comprises dans le Tableau suivant :

x,	r,	s,	y,	t,	u,	z,	v,	w,	x,	r,	s,	y,	t,	u,	z,	v,	w,
1,	6,	8,	2,	5,	7,	3,	4,	9,	1,	5,	9,	2,	4,	8,	3,	6,	7,
4,	2,	9,	5,	1,	8,	6,	3,	7,	4,	3,	8,	5,	2,	7,	6,	1,	9,
7,	2,	6,	8,	1,	5,	9,	3,	4,	7,	3,	5,	8,	2,	4,	9,	1,	6,
1,	6,	8,	4,	3,	5,	7,	2,	9,	1,	5,	9,	4,	2,	6,	7,	3,	8,
2,	6,	7,	5,	3,	4,	8,	1,	9,	2,	4,	9,	5,	1,	6,	8,	3,	7,
3,	5,	7,	6,	2,	4,	9,	1,	8,	3,	4,	8,	6,	1,	5,	9,	2,	7,
3,	4,	8,	5,	2,	6,	7,	1,	9,	1,	6,	8,	5,	2,	4,	9,	3,	7,
2,	6,	8,	3,	4,	5,	7,	1,	9,	2,	5,	9,	3,	1,	8,	7,	4,	6,
3,	2,	9,	7,	1,	5,	8,	4,	6,	3,	5,	6,	7,	2,	4,	8,	1,	9,

où les lettres r et s, t et u, v et w représentent successivement les groupes de deux chiffres placés entre x et y, y et z, z et x.

Remarque I. — Les problèmes précédents peuvent être généralisés, en remplaçant dans leur énoncé les neuf chiffres 1, 2, 3, ..., 9 par neuf nombres *quelconques* $a+1$, $a+2$, ..., $a+9$ en progression arithmétique dont la raison est 1. On voit facilement que toutes les nouvelles solutions se déduisent des précédentes en y remplaçant chaque chiffre c, dans la position où il se trouve placé, par le nombre $(c+a)$.

Remarque II. — Si, dans chacune des solutions de ces problèmes, on tenait compte des permutations qu'on peut faire subir aux trois nombres x, y, z placés aux

sommets et aux deux nombres de chacun des trois groupes placés entre deux sommets, on aurait un nombre de solutions quarante-huit fois plus grand.

Note. — La même question (1323) a été résolue par M. Lissençon, ancien élève de l'École Polytechnique et par M. Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1338. Démontrer que les solutions entières et positives de l'équation $x^2+1=2y^2$, dont les deux premières sont $x=1$ et $y=1$, $x=7$ et $y=5$, se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de x ou de y de six fois la dernière pour obtenir la suivante. (LIONNET.)

1339. Trouver un nombre qui soit, ainsi que son bicarré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

(LIONNET.)

1340. Si a, b, c sont les côtés rangés par ordre de grandeurs décroissantes d'un triangle ABC, et S la surface de ce triangle :

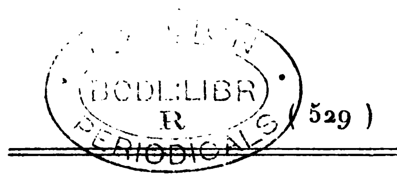
1° L'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des trois bissectrices intérieures a pour expression

$$\frac{2abcS}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

2° L'aire du triangle dont les sommets sont les pieds de la bissectrice intérieure issue du sommet A et des deux bissectrices extérieures issues des sommets B, C a pour expression

$$\frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)}.$$

(DOSTOR.)



NOTE RELATIVE A L'APPROXIMATION DES MOYENNES GÉOMÉTRIQUES PAR DES SÉRIES DE MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET DE MOYENNES HARMONIQUES;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,

Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Directeur de l'École d'Artillerie de Toulouse.

D'intéressants travaux de M. Alexéeff (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, août 1879, p. 403) avaient, depuis quelque temps déjà, attiré l'attention sur une méthode d'extraction de la racine carrée du produit de deux quantités, qui résulte du calcul de moyennes arithmétiques et de moyennes harmoniques successives. M. Lucas vise la même méthode, qu'il croit d'ailleurs avoir été connue des anciens, en proposant la question 1325, ainsi formulée dans la livraison de septembre 1879 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*:

On prend la moyenne arithmétique p_1 *et la moyenne harmonique* q_1 *de deux quantités* p *et* q : $p_1 = \frac{p+q}{2}$, $q_1 = \frac{2pq}{p+q}$; *on opère de même sur* p_1 *et* q_1, *puis sur* p_2 *et* q_2, *et ainsi de suite, de telle manière que* $p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}$, $q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$.

Trouver l'expression générale de p_n *en fonction de* p *et* q; *montrer qu'on a* $p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > \sqrt{pq}$, *et* $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < \sqrt{pq}$.

La dernière partie de cette question, c'est-à-dire le principe sur lequel repose la méthode d'approximation,

devient de vérité évidente sur la figure bien simple que voici.

Prenons à partir d'un point O, sur un axe, les longueurs $OP = p$, $OQ = q$, en supposant $p > q$; sur $PQ = p - q$, comme diamètre, décrivons un cercle, et menons les deux tangentes $OT = OT' = \sqrt{pq}$. Le centre P_1 de ce cercle fera connaître la moyenne arithmétique $p_1 = \frac{p+q}{2} = OP_1$; le point Q_1 d'intersection de l'axe avec la corde des contacts TT' fera connaître la moyenne harmonique $q_1 = \frac{2pq}{p+q} = OQ_1$; enfin, si du point O comme centre avec $OT = \sqrt{pq}$ comme rayon, on décrit un cercle, le point X d'intersection avec l'axe donnera $OX = \sqrt{pq}$.

Le point X étant nécessairement compris entre P_1 et Q_1, on aura $p_1 > \sqrt{pq} > q_1$.

Si la même construction est répétée avec les points P_1 et Q_1, le point X ne changera pas, attendu que

$$pq = p_1 q_1 = OP.OQ = OP_1.OQ_1;$$

on aura donc encore

$$p_2 > \sqrt{pq} > q_2,$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Le rayon $\frac{1}{2}(p_n - q_n)$ du cercle qui renferme toujours le point X suit une loi de décroissance plus rapide que celle d'une progression géométrique dont la raison serait $\frac{1}{2}$, car le diamètre de rang n est plus petit que le rayon de rang $n - 1$, d'après la figure.

Quant aux formules qui expriment les quantités p_n, q_n

et $\frac{1}{2}(p_n - q_n)$, elles peuvent être données sous une forme concise, en se servant des notations que je vais indiquer.

Représentons par S_{2^n} la somme des puissances de degré 2^n des racines de l'équation

$$x^2 - (p+q)x + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = 0$$

et par D_{2^n} la différence de ces mêmes puissances, de telle sorte que

$$S_{2^n} = \left(\frac{p+q}{2} + \sqrt{pq}\right)^{2^n} + \left(\frac{p+q}{2} - \sqrt{pq}\right)^{2^n},$$

et

$$D_{2^n} = \left(\frac{p+q}{2} + \sqrt{pq}\right)^{2^n} - \left(\frac{p+q}{2} - \sqrt{pq}\right)^{2^n}.$$

On aura, en vertu des propriétés des fonctions S_{2^n} et D_{2^n},

$$p_n = \frac{S_{2^{n-1}}}{2S_{2^{n-2}}S_{2^{n-3}}\ldots S_2S_1} = \frac{S_{2^{n-1}}}{D_{2^{n-1}}}\sqrt{pq},$$

$$q_n = \frac{pq}{p_n} = \frac{D_{2^{n-1}}}{S_{2^{n-1}}}\sqrt{pq},$$

$$\frac{1}{2}(p_n - q_n) = \frac{\left(\frac{p-q}{2}\right)^{2^n}}{S_{2^{n-1}}S_{2^{n-2}}\ldots S_2S_1}$$

$$= \frac{2\left(\frac{p-q}{2}\right)^{2^n}}{D_{2^n}} = \left(\frac{S_{2^{n-1}}^2 - D_{2^{n-1}}^2}{S_{2^{n-1}}D_{2^{n-1}}}\right)\sqrt{pq}.$$

Ces formules sont générales, pourvu que la valeur de S_{2^k} soit prise égale à 1 lorsque l'exposant k de 2 devient négatif dans l'indice.

Note. — La même question (1325) a été résolue par M. H.-J. Krantz.

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].

CHAPITRE III.

Valeurs numériques des éléments qui permettent d'apprécier les déformations produites par les divers modes de projection dans la construction des Mappemondes.

Préliminaires.

68. Parmi les angles qui ont leur sommet en un point quelconque du globe, et leurs côtés tangents à sa surface, celui que la représentation altère le plus se trouve remplacé sur la carte par son supplément (n° 12); ce ne peut donc être l'angle du méridien et du parallèle. Ces deux lignes ne sont pas non plus celles dont les directions correspondent aux valeurs extrêmes du rapport de longueurs, à moins que, sur la carte, elles ne se trouvent perpendiculaires entre elles (n° 18). Ainsi, pour se rendre compte de la déformation produite autour d'un point donné, il ne suffit pas de calculer les trois altérations relatives au méridien et au parallèle de ce point; mais il faut en déduire les demi-axes de l'ellipse indicatrice, qui ne sont autre chose que le *maximum* et le *minimum* du rapport de longueurs (n° 14), et dont le

---

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVIII, p. 385.

produit donne le rapport des surfaces (n° 18). En divisant leur différence par leur somme, on obtient le sinus de la plus grande altération qu'éprouvent les angles comptés à partir de l'une des tangentes principales (n° 7); enfin, le double de cette altération fait connaître la plus grande altération d'angle (n° 12).

Soient l la latitude et m la longitude d'un point de la surface terrestre. Il est permis de faire abstraction de l'aplatissement dans la recherche des altérations produites autour de ce point, car cela revient à négliger une très-petite fraction de la valeur de chacune d'elles; on peut donc prendre respectivement, pour longueurs des arcs infiniment petits de méridien et de parallèle qui partent du point considéré, dl et $\cos l\, dm$. Le plus souvent, les longueurs correspondantes de la carte se déduiront immédiatement de la définition du système de projection ou de quelqu'une de ses propriétés; en tout cas, elles seront fournies par les formules du n° 20. Le coefficient de dl dans l'une, et, dans l'autre, le produit du coefficient de dm par $\text{séc}\, l$ feront connaître les rapports de longueur, h et k, sur le méridien et sur le parallèle. On calculera ensuite l'altération θ éprouvée par l'angle de ces deux lignes.

Dans l'ellipse indicatrice, h et k sont deux demi-diamètres conjugués inclinés l'un sur l'autre de $\frac{\pi}{2} - \theta$; il sera donc facile de déterminer les demi-axes, a et b, de cette ellipse, puis le *maximum*, ω, de l'altération éprouvée par l'angle que fait, avec la direction de l'un d'eux, une autre direction variable, enfin le rapport S des éléments superficiels. Par exemple, si l'on pose

$$\tang \lambda = \frac{k}{h}, \quad \sin 2\gamma = \cos\theta \sin 2\lambda,$$

on pourra faire usage des formules

$$\sin\omega = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right), \quad S = hk\cos\theta,$$

$$a = \sqrt{S\cot\gamma}, \quad b = \sqrt{S\,\text{tang}\,\gamma}.$$

En général, nous avons choisi l'échelle de manière qu'au centre de la carte S soit égal à l'unité.

Nous appellerons *autogonales* les projections qui conservent les angles, et *authaliques* celles qui conservent les aires. Dans les projections autogonales, on a

$$\theta = 0, \quad \omega = 0, \quad h = k = a = b, \quad S = a^2,$$

et, dans les projections authaliques,

$$a = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \quad b = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \quad S = 1;$$

lorsque, dans ces dernières, les longueurs sont aussi conservées le long des parallèles, on a de plus

$$h = \text{séc}\,\theta, \quad k = 1, \quad \text{tang}\,\omega = \frac{1}{2}\text{tang}\,\theta.$$

69. Les éléments qui figurent dans nos Tableaux sont principalement 2ω, a, b et S; dans certains cas où les trois derniers se trouvent avoir des valeurs inférieures à l'unité, nous donnons aussi celles de leurs inverses α, β, Σ, et quelquefois celles de $a\beta$, c'est-à-dire du rapport de a à b. Ces éléments suffisent toujours pour l'étude de la déformation produite autour de chaque point, mais non pour la comparaison des longueurs en des points différents de la carte : quand la plus petite des valeurs de b est égale à un, il est naturel de considérer l'arc infiniment petit auquel elle correspond comme reproduit en vraie grandeur, et les divers *maxima* de l'al-

tération de l'unité de longueur comme représentés par les valeurs de $a - 1$; dans le cas contraire, pour que l'interprétation ne cesse pas d'être exacte, il faut substituer aux valeurs de a les quotients de leur division par la plus petite valeur de b; une remarque analogue s'appliquerait à la comparaison des éléments de surface; c'est pourquoi, dans les Tableaux relatifs à certains modes de projection, on trouvera des colonnes intitulées (a) et (S) contenant respectivement les rapports des valeurs de a et de S aux plus petites valeurs que b et S sont susceptibles de prendre dans toute l'étendue de la carte.

Les nombres que nous avons calculés se rapportent en général aux points d'intersection des parallèles de 15 en 15 degrés de latitude avec les méridiens de 15 en 15 degrés de longitude, le premier méridien étant celui dont la projection sépare la carte en deux portions symétriques.

70. Parmi les projections que nous considérerons, il y en a six dans lesquelles les parallèles sont représentées par des droites de même direction, les méridiens par d'autres droites perpendiculaires aux premières et ayant entre elles des distances proportionnelles aux différences de longitude; ce sont : la projection de Mercator, le développement cylindrique, la projection des cartes plates carrées, celle des cartes plates parallélogrammatiques et deux projections du P. Braun. Les altérations y sont indépendantes des longitudes, et, pour obtenir toutes celles qui se rapportent à la représentation du globe entier, il suffit de faire varier les latitudes de zéro à 90 degrés.

Beaucoup d'autres systèmes se prêtent aussi à la représentation complète de la Terre sur une seule carte, ou à celle d'une portion plus grande qu'un hémi-

sphère, mais avec des altérations d'autant plus fortes que cette portion est plus considérable; pour chacun d'eux nous avons calculé les altérations produites dans la représentation d'un hémisphère seulement. Lorsque cet hémisphère est limité par un méridien, il arrive presque toujours que l'équateur de la carte est rectiligne et joue le rôle d'axe de symétrie, de sorte qu'il suffit de considérer le quart de la carte, et de faire varier les latitudes ainsi que les longitudes, de zéro à 90 degrés.

Dans une projection centrale effectuée sur le plan de l'équateur ou sous l'aspect polaire, les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques, les méridiens sont des droites partant du centre et faisant entre elles des angles égaux à ceux des méridiens du globe; les altérations ne dépendent que de la latitude ou de la distance polaire δ qui en est le complément. Dans la projection centrale de même nature effectuée sur l'horizon d'un lieu donné, ce sont les petits cercles perpendiculaires à la verticale de ce lieu et les grands cercles contenant cette verticale qui se trouvent représentés par des circonférences concentriques et des droites concourantes; les altérations sont les mêmes que dans la projection polaire ou équatoriale, seulement elles se rapportent à des points différents; elles seront fournies par les mêmes Tables, pourvu que dans celles-ci on regarde δ comme désignant toujours la distance angulaire d'un lieu quelconque à celui qui correspond au centre de la carte. Néanmoins, afin d'avoir des termes de comparaison entre les projections centrales effectuées sur un méridien et les autres projections méridiennes, nous avons déterminé, pour quelques-unes des premières, les valeurs des éléments a, b, ..., de 15 en 15 degrés de longitude et de 15 en 15 degrés de latitude. La première ligne horizontale et la première colonne verticale des Tables qui contiennent

ces valeurs reproduisent les nombres relatifs à la projection équatoriale. Pour quatre des projections centrales polaires, nous avons considéré tous les points dont la colatitude δ est multiple de 5 degrés.

Dans les perspectives que nous aurons à étudier, le plan du Tableau est perpendiculaire au diamètre mené par le point de vue; ce sont donc des projections centrales. Ce plan est d'ailleurs parallèle à celui du grand cercle qui limite l'hémisphère à représenter; nous le supposerons tangent à cet hémisphère, afin de nous conformer à la convention qui a été faite sur le choix de l'échelle.

Pour étudier les diverses projections au point de vue de la déformation qu'elles produisent, il est naturel de les diviser en trois classes comprenant respectivement les projections autogonales, les projections authaliques, enfin celles qui ne conservent ni les angles ni les surfaces, et que nous appellerons projections *aphylactiques*.

Projections autogonales ($\omega = 0$, $b = a$).

71. *Projection de Mercator ou des cartes marines dites cartes réduites* [Tableau I (*)]. — Les méridiens et les parallèles de la carte sont des droites formant un canevas rectangulaire. L'équateur est développé en vraie grandeur. La condition que les angles soient conservés détermine la distance d'un parallèle de la carte à l'équateur en fonction de la colatitude δ; quand on suppose

(*) Les cent quatre-vingt-seize Tableaux numériques auxquels nous renverrons successivement ont été reportés à la fin du Mémoire, dont ils occupent les soixante dernières pages; ils se trouvent répartis en cinquante-deux groupes désignés par des numéros écrits en chiffres romains.

la Terre sphérique, cette distance est égale au logarithme népérien de $\tang \frac{\delta}{2}$.

72. *Projection cylindrique autogonale de Lambert* (Tableaux II). — Les coordonnées rectangulaires des divers points de la Carte sont données par les formules

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \sin m}{1 - \cos l \sin m}, \quad \tang y = \tang l \operatorname{séc} m,$$

les logarithmes étant ceux du système népérien. On peut déduire cette projection de celle de Mercator en attribuant à l'un des méridiens le rôle que joue l'équateur dans cette dernière.

73. *Projection stéréographique équatoriale* (Tableau III). — C'est la perspective de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur sur le plan tangent en celui des deux pôles que contient cet hémisphère, le point de vue étant placé à l'autre pôle.

74. *Projection stéréographique méridienne* (Tableaux IV). — C'est la perspective d'un hémisphère limité par un méridien, le plan du Tableau étant tangent à cet hémisphère et parallèle à ce méridien, et le point de vue étant diamétralement opposé au point de contact.

75. *Projections coniques autogonales de Lambert* (Tableaux V). — Les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques, les méridiens des droites partant du centre commun et faisant entre elles des angles proportionnels à ceux des méridiens du globe. Le rapport constant des premiers angles aux autres, que nous appellerons l'*exposant* de la projection, étant désigné par n, et R étant le rayon du cercle qui corres-

pond à l'équateur, le rayon r de celui qui correspond au parallèle de colatitude δ est donné par la formule

$$r = \mathrm{R}\left(\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\right)^n.$$

L'hémisphère se trouve représenté par un secteur dont le pôle occupe le centre, et dont l'angle P, exprimé en degrés, est égal à 360 n. Si l'on prenait l'exposant plus grand que l'unité, il y aurait recouvrement. Dans toutes les projections où il est au contraire plus petit que l'unité, a passe par un *minimum* lorsque δ varie de zéro à 90 degrés; pour chacune de ces projections, nous avons choisi la constante arbitraire R de manière que ce *minimum* soit égal à 1; la latitude correspondante a été désignée par l_0 dans le premier des Tableaux V. Ces Tableaux se rapportent à 13 valeurs de n; la première valeur, savoir $n = 0$, donne, avec $n\mathrm{R} = 1$, la projection de Mercator; la dernière valeur, savoir $n = 1$, donne la projection stéréographique équatoriale. Partout dans celle-ci, et partout ailleurs qu'au pôle dans les autres, les angles sont conservés. Pour celle dont l'exposant est $\frac{2}{3}$, nous avons calculé de 5 en 5 degrés de latitude les valeurs de a et de S.

76. *Projections autogonales à méridiens circulaires, le centre de la carte correspondant à un point de l'équateur* (Tableaux VI). — Dans un canevas orthogonal, les méridiens ne peuvent être circulaires sans que les parallèles le soient; car, si les méridiens de la carte sont des cercles, la droite qui passe par les projections des pôles servira d'axe radical à deux quelconques d'entre eux, et leurs trajectoires orthogonales seront des cercles ayant leurs centres sur cette droite. Cela ne suffit pas pour que la

projection soit autogonale; il faut de plus que les angles sous lesquels se coupent les méridiens de la carte soient, avec ceux des méridiens correspondants du globe, dans un rapport constant, que nous appellerons l'*exposant* de la projection. Enfin, n étant cet exposant, si l'on désigne par δ' l'angle de la ligne des pôles de la carte avec le rayon de l'un des points où la circonférence décrite sur cette ligne comme diamètre rencontre la projection du parallèle de colatitude δ, on devra avoir

$$\operatorname{tang}\frac{\delta'}{2} = \left(\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\right)^n.$$

Pour $n = 0$, on retombe sur la projection de Mercator, et, pour $n = 1$, sur la projection stéréographique méridienne. Pour $n > 2$, il y aurait recouvrement dans la représentation d'un hémisphère. Aux pôles, par exception, les angles ne sont pas conservés, si ce n'est dans la projection stéréographique. Sur un même parallèle, a et S augmentent avec la longitude. Nous donnons, pour vingt et une de ces projections, l'angle P sous lequel se coupent les demi-méridiens extrêmes, ainsi que les valeurs de a et de S relatives à quatre points particuliers.

77. *Projection de Lagrange* (Tableaux VII). — La projection orthomorphe à méridiens circulaires dans laquelle a et S varient le plus lentement possible, sur le parallèle et sur le méridien, à partir du point central, est celle qui correspond à $n = \sqrt{2}$. L'angle P y est égal à $254° 33' 30''$.

78. *Projection autogonale de Littrow* (Tableaux VIII). — Les parallèles et les méridiens sont représentés respectivement par des ellipses et des hyperboles homofocales. Les coordonnées rectangulaires d'un point quel-

conque de la carte sont

$$x = \text{tang}\, l \cos m, \quad y = \text{séc}\, l \sin m.$$

Sur un même parallèle, a et S diminuent à mesure que m augmente; sur un même méridien, ils augmentent en même temps que l. Nous donnerons seulement les valeurs qu'ils prennent sur l'équateur, sur le premier et le dernier méridien.

Projections authaliques ($\beta = a$, $S = 1$).

79. *Développement cylindrique* (Tableau IX). — On développe le cylindre circonscrit le long de l'équateur. Les méridiens et les parallèles de la carte sont les transformées des génératrices et des sections droites que tracent, sur le cylindre, les plans des méridiens et ceux des parallèles du globe. Le canevas est donc orthogonal et formé par deux systèmes de droites.

80. *Développement cylindrique transverse.* — On projette orthogonalement chaque point du globe sur la surface d'un cylindre qui est circonscrit le long d'un méridien, et que l'on développe ensuite.

Nulles sur ce méridien, les altérations sont les mêmes en tous les points de chacun des petits cercles qui ont leurs plans parallèles au sien. Elles sont fournies par le Tableau relatif au développement cylindrique ordinaire, pourvu que, dans ce Tableau, on considère l'argument l comme représentant la distance sphérique du petit cercle au méridien de contact. Le même Tableau donne les valeurs des éléments 2ω, a, b, ..., pour les divers points de l'équateur, lorsqu'on y considère l comme représentant la longitude. Enfin, si l'on y remplace l par $90° - l$,

il fera connaître les valeurs des éléments pour les divers points du méridien qui est perpendiculaire au premier.

81. *Projections cylindriques authaliques.* — Les méridiens sont représentés par des droites parallèles entre elles, les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. La distance des projections de deux méridiens est dans un rapport constant, n, avec l'arc d'équateur intercepté par ces deux méridiens; la distance des projections de deux parallèles est dans le rapport inverse, $\frac{1}{n}$, avec celle des plans des deux parallèles.

Pour $n = 1$, on retombe sur le développement cylindrique. Quel que soit n, on a aux pôles $2\omega = 180°$, $a = \infty$, $b = 0$. Nous reviendrons sur ces projections dans le Chapitre IV.

82. *Projection centrale authalique équatoriale de Lambert,* dite *projection de Lorgna* (Tableau X). — Les méridiens sont représentés par des droites concourantes faisant entre elles des angles égaux aux différences de longitudes, les parallèles par des circonférences concentriques ayant pour rayons les distances rectilignes du pôle aux parallèles du globe.

83. *Projection centrale authalique de Lambert* (Tableaux XI). — Les grands cercles qui contiennent la verticale d'un lieu de l'équateur et les petits cercles perpendiculaires à cette ligne remplacent respectivement les méridiens et les parallèles de la projection équatoriale. Quant aux méridiens et aux parallèles de la nouvelle projection, ce sont des courbes du quatrième degré.

84. *Projections coniques authaliques de Lambert.* — Les méridiens de la carte sont des droites concou-

rantes faisant entre elles des angles proportionnels aux différences de longitudes, et les parallèles, des circonférences ayant toutes pour centre le point de concours des méridiens. Le rapport constant de l'angle de deux méridiens de la carte à celui des méridiens correspondants du globe étant désigné par n, le rayon de chaque parallèle de la carte est, avec la corde qui va du pôle au parallèle correspondant du globe, dans le rapport de 1 à $\sqrt{n}$.

En faisant $n = 1$, on retrouve la projection du n° 15; en faisant $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient celle du numéro suivant. C'est seulement dans le Chapitre IV que nous aurons à considérer d'autres valeurs de n.

85. *Projection conique authalique périgonale* (Tableau XII). — Nous avons trouvé que, pour rendre aussi faible que possible la plus grande altération d'angle, et par conséquent aussi la plus grande altération de longueur, sur la carte d'un hémisphère dressée d'après le système des projections coniques authaliques, il fallait prendre n égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La carte, au lieu d'un cercle entier, forme alors un secteur de 254°33'30". Les altérations sont nulles le long du parallèle qui a pour colatitude 65°32'11".

86. *Projections tronconiques authaliques* ou *projections d'Albers*. — Elles ne diffèrent des projections coniques authaliques que par l'expression du rayon du parallèle de la carte en fonction de la colatitude. Cette expression est ici

$$r = \sqrt{\frac{2}{n}(C - \cos\delta)},$$

C désignant un nouveau paramètre arbitraire.

En prenant $C = 1$, on retrouve les projections coniques. Pour toute autre valeur de C, le pôle se trouve remplacé par un arc de cercle de grandeur finie, de sorte qu'il n'y a pas lieu de faire usage de ces projections dans la représentation d'un hémisphère.

87. *Projection authalique de Mollweide,* dite *projection homalographique de Babinet* (Tableaux XIII). —Les méridiens de la carte sont des ellipses ayant toutes pour axe la droite qui joint les deux pôles; les autres axes sont proportionnels aux longitudes; l'un deux, celui de la demi-ellipse qui correspond à la longitude de 90 degrés, est égal au premier axe. Les parallèles sont représentés par des droites perpendiculaires à celle qui joint les deux pôles; l'équation

$$2l' + \sin 2l' = \pi \sin l$$

détermine l'angle au centre l' qui correspond à l'arc intercepté entre la projection de l'équateur et celle du parallèle de latitude l sur le méridien circulaire de la carte.

Outre les Tableaux habituels, nous donnons ici celui des rapports de longueurs sur les parallèles, ainsi que de leurs inverses, lesquels sont indépendants des longitudes. Nous donnons aussi les éléments de la déformation sur le parallèle de 89 degrés de latitude, enfin les valeurs de 2ω et de a, de 10 degrés en 10 degrés, sur le méridien qui limite l'hémisphère.

88. *Projection sinusoïdale de Nicolas Sanson,* dite *projection de Flamsteed* (Tableaux XIV).—Le premier méridien est développé en vraie grandeur suivant une droite, les parallèles suivant d'autres droites perpendiculaires à la première, et sur lesquelles on porte, pour construire par points les projections des méridiens, des

longueurs égales aux arcs de parallèles; ces projections sont des sinusoïdes.

Nous rencontrons ici un premier exemple des systèmes de représentation dans lesquels chacun des éléments ω, a, b prend, au pôle, des valeurs différentes suivant que l'on regarde ce point comme appartenant à un méridien ou à un autre. La condition de continuité, que suppose la loi de déformation établie dans le premier Chapitre, ne se trouve pas remplie au pôle par la projection sinusoïdale, puisque les deux moitiés d'un même méridien n'y ont pas la même tangente; de là vient que, sur les divers méridiens, a, par exemple, ne tend pas vers la même limite quand l s'approche indéfiniment de $90°$.

89. *Projections sinusoïdales authaliques.* — Le méridien moyen de la carte est une droite, les parallèles d'autres droites perpendiculaires à la première et interceptant sur celle-ci des longueurs proportionnelles aux différences de latitudes. Pour tracer les méridiens par points, on porte, sur les parallèles de la carte, des longueurs proportionnelles aux arcs des parallèles du globe. Le rapport constant n de la distance de deux parallèles de la carte à la différence de leurs latitudes, et celui de la longueur d'une portion de parallèle de la carte à l'arc correspondant du globe, sont inverses l'un de l'autre.

La projection de Sanson correspond à $n = 1$; la suivante à

$$n = \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}} = 1,3646\ldots$$

90. *Projection sinusoïdale authalique périgonale* (Tableau XV). — La valeur précédente de n est celle que nous avons obtenue en cherchant la projection sinusoïdale authalique qui rend aussi faible que possible la

plus grande valeur de chaque altération sur une carte de la moitié du globe terrestre.

Les altérations sont les mêmes tout le long de l'équateur et tout le long du méridien moyen; elles correspondent par conséquent aux nombres de la première ligne du Tableau, lequel se rapporte au méridien extrême, qui est celui sur lequel il y a le plus de déformation.

91. *Projection dite de Bonne ou du Dépôt de la Guerre* ou *de la Carte de France* (Tableau XVI). — Le premier méridien, ou méridien moyen, est développé en vraie grandeur suivant une droite, et les parallèles suivant des circonférences ayant leurs centres en un même point de cette droite; pour l'un d'entre eux, dit *parallèle moyen*, le rayon est égal à la génératrice du cône circonscrit au globe terrestre le long de ce parallèle. Sur les parallèles de la carte, on prend, à partir du méridien rectiligne, des arcs égaux à ceux des parallèles du globe; les extrémités de ces arcs déterminent les projections des autres méridiens.

Il ne se produit aucune altération sur le méridien moyen ni sur le parallèle moyen. Sur les autres parallèles, les altérations augmentent avec la longitude; aux pôles elles sont indépendantes du choix que l'on peut faire du parallèle moyen; nous donnons les valeurs qui se rapportent à ces points, sur les deux méridiens extrêmes, pour la carte d'un hémisphère et pour celle du globe entier. Ces valeurs correspondent aux plus grandes altérations lorsqu'on prend l'équateur pour parallèle moyen; alors on retombe sur la projection sinusoïdale de Nicolas Sanson. Avec tout autre parallèle moyen, on aura des altérations plus fortes. Par exemple, avec le parallèle moyen de 45 degrés de latitude nord, les maxima ont lieu sur le parallèle de

$69^\circ 25' 10''$ de latitude sud, et l'on a, à l'intersection de ce parallèle avec le méridien de 90° de longitude,

$$\theta = 58^\circ 51', \quad 2\omega = 79^\circ 12',$$
$$a = 2,125, \quad b = 0,471, \quad a\beta = 4,517.$$

Le parallèle moyen étant encore celui de 45 degrés, on aurait, sur l'équateur et sur les méridiens extrêmes, dans la représentation de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur,

$$\theta = 60^\circ 23', \quad 2\omega = 82^\circ 41',$$
$$a = 2,212, \quad b = 0,452, \quad a\beta = 4,892.$$

92. *Projection à méridiens et parallèles rectilignes de M. Collignon* (Tableaux XVII). — Les coordonnées rectangulaires de la projection du point de longitude m et de colatitude δ sont données par les formules

$$x = \sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2}\right), \quad y = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m \sin\frac{\delta}{2}.$$

Les demi-méridiens qui limitent la carte d'un hémisphère dessinent un carré, dont le premier méridien et l'équateur sont les diagonales. C'est à ces diverses lignes que se rapportent les nombres des Tableaux XVII.

93. *Projection dite stéréographique équivalente de M. de Prépetit-Foucaut* (Tableaux XVIII). — La projection du point du globe dont la latitude est l et la longitude m a pour coordonnées rectangulaires

$$x = \sqrt{\pi}\,\mathrm{tang}\,\frac{l}{2}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, m \cos l \cos^2\frac{l}{2}.$$

Les parallèles de la carte sont rectilignes. Les altérations sont les mêmes pour tous les points de l'équateur.

94. *Projection authalique de Werner* (Tableau XIX). — Les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques ayant pour rayons les distances sphériques de l'un des pôles aux parallèles du globe. Sur ces circonférences, on prend, à partir du premier méridien, qui est rectiligne, des arcs égaux à ceux des parallèles terrestres, ce qui détermine les autres méridiens.

Nulles tout le long du méridien moyen, les altérations croissent avec la longitude. Sur chaque méridien, elles augmentent, à partir du pôle dont la projection sert de centre aux projections des parallèles, jusqu'au point de l'autre hémisphère qui a pour latitude $67^\circ 12' 10''$. Ainsi, dans la carte de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur, elles atteindraient leurs plus grandes valeurs à l'intersection de cette ligne avec le méridien de 180 degrés de longitude. On a, en ce point,

$$2\omega = 90^\circ,\quad a = 2,414,\quad b = 0,414,\quad a\beta = 5,828.$$

Sur la carte d'un hémisphère limité par un méridien, la projection du pôle nord servant de centre aux projections des parallèles, les *maxima* ont lieu pour

$$l = -67^\circ 12' 10'',\quad m = 90^\circ.$$

(*A suivre.*)

RECHERCHES SUR DEUX MODES DE TRANSFORMATION DES FIGURES SOLIDES;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

---

1. Désignons par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ les coordonnées d'un point P dans un certain système d'axes, et par X, Y,

Z, T des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z, t.

Désignons de même par $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ les coordonnées d'un point P' dans un autre système d'axes, et par X', Y', Z', T' des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z', t'.

Les relations

$$(1) \qquad \lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ' = \rho TT',$$

dans lesquelles λ, μ, ν, ρ ont des signes quelconques, définissent un mode de transformation des figures tel, qu'à chaque point P de la première figure correspond un point P' et un seul dans la seconde, et réciproquement.

Mais ces relations ne donnent pas *tous* les modes de transformation où les points se correspondent un à un. En effet, elles ne contiennent que vingt-sept constantes arbitraires. Or les trois relations algébriques les plus générales, qui établissent une correspondance de point à point, contiennent chacune seize termes. On peut, il est vrai, les réduire à quinze termes, en les remplaçant par trois combinaisons éliminatoires. Il reste donc quatorze arbitraires dans chaque relation, en tout quarante-deux arbitraires.

Ainsi, quelque générale que soit la transformation définie par les relations (1), elle est bien loin de représenter toutes les lois qui établissent une correspondance de point à point.

Il n'en est pas de même dans la Géométrie plane, où les relations analogues à la relation (1) contiennent quatorze constantes arbitraires, tout comme les deux relations algébriques les plus générales qui établissent une correspondance de point à point. Là les relations

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ'$$

représentent bien toutes les lois de correspondance de point à point. C'est d'ailleurs ce qu'on peut démontrer par des considérations géométriques (*).

La classification complète des modes de transformation qui, dans l'espace, établissent une correspondance de point à point, paraît difficile à faire. Mais, à défaut de cette classification, il peut y avoir intérêt à étudier les transformations définies par les relations (1); car l'un des principaux objets de la Géométrie contemporaine doit être l'étude des surfaces de degré supérieur au second, et rien ne doit être négligé de ce qui peut aplanir les difficultés de cette étude.

2. Les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ représentent quatre plans. On a donc un tétraèdre ABCD, que l'on peut prendre, au besoin, pour tétraèdre de référence, en supposant les paramètres de référence égaux à l'unité, pour faciliter les interprétations géométriques.

On a dans l'autre figure un autre tétraèdre A′B′C′D′, donnant lieu aux mêmes observations. Le sommet A est opposé à la face BCD. Nous dirons par convention que le sommet A est aussi opposé à la face B′C′D′. De même, nous dirons que les arêtes AB et C′D′ sont opposées.

A tout point d'une arête correspond toute l'arête opposée de l'autre tétraèdre. A tout sommet d'un tétraèdre correspond toute la face opposée de l'autre tétraèdre. A tout plan passant par une arête correspond un plan passant par l'arête de même nom; et, par suite, à toute droite passant par un sommet correspond une droite passant par le sommet de même nom. A tout cône d'ordre m ayant son sommet en A correspond un cône d'ordre $2m$

(*) *Voir* notre travail sur les *Transformations du second ordre dans les figures planes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1877).

ayant son sommet en A′; et les bases de ces cônes, dans les plans BCD, B′C′D′, se correspondent suivant les lois de la Géométrie plane : en particulier, à un plan mené par A correspond un cône du second ordre, contenant les arêtes du tétraèdre qui forment le sommet A′.

3. Théorème I. — *A une surface quelconque d'ordre m prise dans l'une des figures* ABCD *correspond, dans l'autre figure, une surface d'ordre* $3m$ *ayant les quatre sommets du tétraèdre* A′B′C′D′ *pour points d'ordre* $2m$.

En effet, on a une équation homogène d'ordre m entre X, Y, Z, T. En y remplaçant ces quantités par les quantités proportionnelles des relations (1), on a une équation homogène de degré $-m$ entre X′, Y′, Z′, T′; et, en multipliant par $(X', Y', Z', T')^m$, cette dernière équation devient de degré $3m$.

Si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les exposants de X′, Y′, Z′, T′ dans cette dernière équation, on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3m$$

et l'on a aussi évidemment

$$\delta \leq m.$$

On conclut de là

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m,$$

ce qui prouve que le sommet D est un point d'ordre $2m$.

Remarque. — Toute surface d'ordre $3m$ ayant quatre points d'ordre $2m$ admet les droites qui les joignent comme lignes d'ordre m.

On a, en effet,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3m$$

et aussi

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m.$$

On conclut de là l'inégalité

$$\leq m$$

et de même les inégalités analogues. Mais alors, puisque l'on a en même temps

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m$$

et

$$\gamma \leq m,$$

on doit conclure que

$$\alpha + \beta \geq m,$$

ou, en d'autres termes, que la ligne CD fait partie m fois de la surface.

THÉORÈME II. — *Réciproquement, à toute surface d'ordre* $3m$ *ayant les sommets du tétraèdre* A'B'C'D' *pour points multiples d'ordre* $2m$, *correspond une surface d'ordre* m.

En effet, si dans l'équation de la surface d'ordre $3m$ on représente les exposants de X', Y', Z', T' par α, β, γ, δ, on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3m$$

et l'on a également

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m;$$

on conclut de là l'inégalité

$$\delta \leq m$$

et les analogues.

Ainsi l'équation de la surface donnée est homogène et de degré $3m$ en X', Y', Z', T', et elle contient chaque variable au plus au degré m. Divisant par $(X', Y', Z', T')^m$, on a une équation homogène de degré $-m$ ne contenant les variables qu'en dénominateur. Remplaçant $\frac{1}{X'}$,

$\frac{1}{Y'}$, $\frac{1}{Z'}$, $\frac{1}{T'}$ par les valeurs proportionnelles λX, μY, νZ, ρT, on obtient une équation homogène et de degré m en X, Y, Z, T, qui représente la surface transformée.

Remarque. — Cette réciproque est très-importante. Elle montre que toute surface d'ordre $3m$ ayant quatre points d'ordre $2m$ est la transformée d'une surface d'ordre m, ce qui permet de déduire les propriétés de la première surface de celles de la seconde.

4. Les deux théorèmes qui précèdent se peuvent établir par de pures considérations géométriques.

Nouvelle démonstration du théorème I. — Une arête AB coupe la surface d'ordre m en m points, à chacun desquels correspond l'arête C'D'. Ainsi chaque arête du tétraèdre A'B'C'D' est une ligne d'ordre m de la surface transformée. Soit maintenant une droite PQ rencontrant AB et CD. La transformée de cette droite est évidemment une droite P'Q' qui rencontre A'B' et C'D'. La droite PQ coupe la surface d'ordre m en m points, auxquels correspondent m autres points sur P'Q'. La droite P'Q' contient donc ces m points qui appartiennent à la surface transformée, plus m points de cette surface au point d'intersection de P'Q' et de A'B' et m autres points de cette même surface aux points d'intersection de P'Q' et de C'D'. La surface transformée est donc bien d'ordre $3m$.

D'autre part, à toute droite passant par A correspond une droite passant par A'. La première droite coupe la surface d'ordre m en m points quelconques. La seconde coupe la surface d'ordre $3m$ aux m points correspondants. Donc le point A' est multiple d'ordre $2m$.

Nouvelle démonstration du théorème II. — Le théo-

rème II est un cas particulier d'un autre théorème que nous allons déduire de quelques remarques simples

Si la surface d'ordre m passe α fois par le point A, le plan B'C'D' fait α fois partie de la transformée : l'ordre de celle-ci s'abaisse donc de α unités, en même temps que l'ordre de multiplicité des points B', C', D'. On voit, d'autre part, que l'ordre de multiplicité du point A' n'est point altéré par cette circonstance. En effet, à une droite AP correspond une droite A'P'. Le nombre des points autres que A où la droite AP coupe la surface d'ordre m est diminué de α unités. Il en est donc de même du nombre des points autres que A' où la droite A'P' coupe la transformée. Mais, comme l'ordre de cette transformée diminue aussi de α unités, l'ordre de multiplicité du point A' demeure invariable. Remarquons enfin, comme dernière conséquence de la circonstance signalée, que l'ordre de multiplicité des lignes droites B'C', C'D', B'D' diminue de α unités.

Examinons une autre circonstance, et supposons que la surface d'ordre m passe par l'arête AB un nombre de fois marqué par le symbole $(\alpha\beta)$. On voit facilement que, dans ce cas, la surface transformée contient l'arête C'D' $(\alpha\beta)$ fois de plus que si cette circonstance ne se présentait pas.

De l'examen des deux circonstances qui précèdent il résulte que :

Si une surface d'ordre m passe par les sommets A, B, C, D, α, β, γ, δ *fois et par les arêtes* AB, ..., $(\alpha\beta)$, ... *fois, la transformée est d'ordre*

$$3m - \alpha - \beta - \gamma - \delta,$$

les sommets A', B', C', D' *sont points multiples de*

l'ordre

$$\alpha' = 2m - \beta - \gamma - \delta,$$
$$\beta' = 2m - \alpha - \gamma - \delta,$$
$$\gamma' = 2m - \alpha - \beta - \delta,$$
$$\delta' = 2m - \alpha - \beta - \gamma,$$

et les arêtes du tétraèdre A′ B′ C′ D′ *sont des lignes de l'ordre*

$$(\alpha'\beta') = m - \gamma - \delta + (\gamma\delta),$$
$$(\alpha'\gamma') = m - \beta - \delta + (\beta\delta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le théorème II n'est qu'un cas particulier de celui qui précède. En effet, on sait que, si une surface d'ordre $3m$ possède quatre points d'ordre $2m$, les droites qui joignent ces points sont sur cette surface des lignes d'ordre m.

On a donc à transformer une surface d'ordre $3m$ ayant les sommets d'un tétraèdre pour points d'ordre $2m$ et les arêtes de ce tétraèdre pour lignes d'ordre m. La transformée est d'ordre

$$3(3m) - 2m - 2m - 2m - 2m = m.$$

Les sommets de l'autre tétraèdre sont sur cette transformée des points d'ordre

$$2(3m) - 2m - 2m - 2m = 0;$$

enfin les arêtes de ce même tétraèdre sont des lignes de l'ordre

$$3m - 2m - 2m + m = 0.$$

5. Examinons quelques surfaces particulières.

A un plan quelconque correspond une surface du troisième ordre ayant les sommets du tétraèdre pour points doubles et les arêtes de ce tétraèdre pour lignes

simples. Si le plan passe par un sommet, la transformée est un cône du second ordre ayant pour centre le sommet de même nom. Si le plan passe par une arête, la transformée est un plan passant par l'arête de même nom.

A une quadrique quelconque correspond une surface du sixième ordre ayant les quatre sommets du tétraèdre pour points quadruples et les arêtes pour lignes doubles. A une quadrique passant par trois sommets correspond une surface du troisième ordre. A une quadrique circonscrite à l'un des tétraèdres correspond une quadrique circonscrite à l'autre.

6. Dans le cas où les tétraèdres sont semblables et où l'on prend en outre

$$\lambda = \mu = \nu = \rho,$$

les formules de transformation s'écrivent

$$XX' = YY' = ZZ' = TT,$$

et, comme les paramètres de référence sont égaux à l'unité, on voit que les plans correspondants menés par deux arêtes de même nom sont également inclinés sur les plans bissecteurs des dièdres correspondants, mais placés de côtés différents. Il résulte de là que les dièdres ayant pour arêtes les arêtes du tétraèdre se conservent d'une figure à l'autre.

7. Dans les figures solides, comme dans les figures planes, les transformations corrélatives des précédentes donnent des résultats plus intéressants.

Prenons un tétraèdre de référence, avec des paramètres de référence égaux à l'unité. L'équation

$$(2) \qquad PX + QY + RZ + ST = 0$$

représente un plan en coordonnées tétraédriques.

Si les coefficients P, Q, R, S sont variables et liés par l'équation homogène

$$(3) \qquad f(P, Q, R, S) = 0.$$

Le plan (2) enveloppe une surface V et chacun de ces plans (2) touche cette surface en un point. L'équation (3) suffit évidemment à définir cette surface, et s'appelle son *équation tangentielle*.

Mais l'équation (3) peut être interprétée d'une autre manière. On y peut regarder P, Q, R, S comme les coordonnées tétraédriques d'un point, et alors cette équation (3) représente une surface différente V_1.

Les deux surfaces V et V_1 sont évidemment telles, que l'une d'elles ne peut être connue sans que l'autre le soit, et l'on peut voir sans peine que cette dépendance mutuelle consiste en ceci qu'elles se transforment l'une dans l'autre par polaires réciproques, quand on prend pour directrice une quadrique conjuguée par rapport au tétraèdre de référence et ayant pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0.$$

En effet, le plan polaire d'un point P, Q, R, S de la surface V_1 par rapport à cette quadrique a pour équation l'équation (2), et les coordonnées P, Q, R, S du point considéré sont liées par l'équation (3).

L'enveloppe de ce plan polaire est donc la surface V.

Il résulte de cette remarque qu'il y a toujours deux moyens de trouver l'équation cartésienne d'une surface quand on a son équation tangentielle, et deux moyens aussi pour résoudre le problème inverse.

8. La remarque qui précède donne aussi une solution simple de la plupart des problèmes que l'on peut se poser sur les coordonnées tangentielles.

Nous choisirons comme exemple le problème suivant, dont la solution nous sera utile plus loin.

On donne les équations tangentielles de deux surfaces

$$f(P, Q, R, S) = o, \tag{4}$$

$$\varphi(P, Q, R, S) = o. \tag{5}$$

On demande la condition pour que ces surfaces soient tangentes en un point.

Il faut et il suffit que les surfaces polaires réciproques soient tangentes en un point. Il s'agit donc d'exprimer que les surfaces représentées par les équations (4) et (5) sont tangentes, tout comme si les équations (4) et (5) étaient des équations cartésiennes. Pour cela, on doit joindre aux équations (4) et (5) les équations suivantes :

$$\frac{f'_P}{\varphi'_P} = \frac{f'_Q}{\varphi'_Q} = \frac{f'_R}{\varphi'_R} = \frac{f'_S}{\varphi'_S}. \tag{6}$$

Ces cinq équations n'en valent d'ailleurs que quatre, à cause des propriétés des fonctions homogènes. Éliminant P, Q, R, S entre quatre de ces équations homogènes, on aura la condition cherchée.

On peut donner du problème actuel une solution presque aussi simple que la précédente. Toute solution commune aux équations tangentielles (4) et (5) donne un plan tangent commun aux deux surfaces. Pour l'une d'elles, les coordonnées du point de contact sont fournies par les équations

$$\frac{X}{f'_P} = \frac{Y}{f'_Q} = \frac{Z}{f'_R} = \frac{T}{f'_S}.$$

Pour l'autre point de contact, on a les équations

$$\frac{X}{\varphi'_P} = \frac{Y}{\varphi'_Q} = \frac{Z}{\varphi'_R} = \frac{T}{\varphi'_S}.$$

Il faut et il suffit que ces deux points de contact coïncident, ce qui donne bien les équations (6) à joindre aux équations (4) et (5).

9. Si les paramètres du plan variable

$$(7) \qquad PX + QY + RZ + ST = 0$$

sont liés par deux équations homogènes

$$(8) \qquad f(P, Q, R, S) = 0,$$

$$(9) \qquad F(P, Q, R, S) = 0,$$

le plan (7) enveloppe une surface développable. Cette développable est d'ailleurs circonscrite aux surfaces représentées respectivement par les équations (8) et (9).

La figure polaire réciproque de cette surface développable, en prenant pour directrice la quartique signalée plus haut, n'est autre chose que la ligne d'intersection des surfaces dont les *équations cartésiennes* sont (8) et (9).

10. Imaginons maintenant un nouveau système d'axes et dans ce système d'axes un nouveau tétraèdre de référence A'B'C'D'; puis faisons correspondre un plan de la première figure

$$(10) \qquad PX + QY + RZ + ST = 0$$

à un plan de la seconde

$$(11) \qquad P'X' + Q'Y' + R'Z' + S'T' = 0,$$

par les relations

$$(12) \qquad \lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR' = \rho SS',$$

dans lesquelles λ, μ, ν, ρ ont des signes quelconques.

Il est visible qu'à un plan de chaque figure correspond dans l'autre figure un plan et un seul. Mais les relations (12) ne donnent pas toutes les lois qui établissent une correspondance de plan à plan; car ces relations (12) ne contiennent, explicitement ou implicitement, que vingt-sept constantes arbitraires au lieu de quarante-deux qu'il en faudrait pour les relations algébriques les plus générales établissant une correspondance de plan à plan. On ne s'occupera ici que des transformations définies par les relations (12).

Toute équation homogène

$$f(P, Q, R, S) = 0 \tag{13}$$

a pour conséquence une autre équation

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0; \tag{14}$$

de sorte que, à toute surface enveloppe du plan (10) ayant pour équation tangentielle l'équation (13), correspond une surface enveloppe du plan (11) ayant pour équation tangentielle l'équation (14).

Les classes des surfaces représentées par les équations tangentielles (13) et (14) sont égales aux degrés de ces équations, puisque ces mêmes équations représentent en coordonnées tétraédriques les surfaces polaires réciproques.

Deux équations homogènes simultanées,

$$\left\{\begin{array}{l} f(P, Q, R, S) = 0, \\ F(P, Q, R, S) = 0, \end{array}\right. \tag{15}$$

ont pour conséquence deux équations homogènes simul-

tanées,

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} f\left(\dfrac{1}{\lambda P'}, \dfrac{1}{\mu Q'}, \dfrac{1}{\nu R'}, \dfrac{1}{\rho S'}\right) = 0, \\ F\left(\dfrac{1}{\lambda P'}, \dfrac{1}{\mu Q'}, \dfrac{1}{\nu R'}, \dfrac{1}{\rho S'}\right) = 0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que, à la développable circonscrite aux surfaces dont les équations (15) sont les équations tangentielles, correspond la développable circonscrite aux deux surfaces correspondantes.

A tout plan mené par A correspond le plan B'C'D'; à tout plan mené par AB, un plan mené par C'D'. Lorsqu'un plan tourne autour de AB, le plan correspondant tourne autour de C'D'. Mais, en général, lorsqu'un plan tourne autour d'une droite, le plan correspondant enveloppe une développable de troisième classe; car au plan

$$PX + QY + RZ + ST = 0$$

correspond le plan

$$\frac{X'}{\lambda P} + \frac{Y'}{\mu Q} + \frac{Z'}{\nu Q} + \frac{T'}{\rho S} = 0.$$

Or l'hypothèse est que P, Q, R, S sont des fonctions linéaires données d'un paramètre variable K. Il en résulte que l'équation du plan correspondant contient ce même paramètre au troisième degré.

11. Théorème III. — *Une surface quelconque de classe m se transforme, en général, en une surface de classe 3m ayant les quatre faces du tétraèdre pour plans tangents d'ordre 2m.*

La surface V, qui a pour équation

$$f(P, Q, R, S) = 0,$$

se transforme en la surface V′ dont l'équation est

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0.$$

Ces équations, considérées comme des équations cartésiennes, représentent aussi respectivement les surfaces réciproques V_1 et V'_1. Or, la loi de correspondance de ces surfaces V_1 et V'_1 a été étudiée. On a vu que, la surface V_1 étant quelconque et d'ordre m, la surface V'_1 est d'ordre $3m$. D'où l'on doit conclure que, si la surface V est de classe m, la surface V′ est de classe $3m$.

Remarquons en outre que le plan polaire de A′ par rapport à la quadrique directrice

$$X'^2 + X'^2 + Z'^2 + T'^2 = 0$$

n'est autre que B′C′D′ et alors, le point A′ étant, comme on sait, un point d'ordre $2m$ sur la surface V'_1, on doit admettre que le plan B′C′D′ est $2m$ fois tangent à la surface V′.

Théorème IV. — *Réciproquement toute surface de classe $3m$ ayant les quatre faces de l'un des tétraèdres pour plans tangents d'ordre $2m$ se transforme en une surface de classe m.*

On fait la démonstration comme ci-dessus, en considérant les figures réciproqnes.

Remarque. — Ce dernier théorème permet de déduire les propriétés des surfaces de classe $3m$ ayant quatre plans tangents d'ordre $2m$ de celles des surfaces de classe m.

12. On peut donner des deux théorèmes qui précèdent des démonstrations indépendantes de la théorie des polaires réciproques.

Nouvelle démonstration du théorème III. — La sur-

face donnée a pour équation tangentielle

$$(17) \qquad f(P, Q, R, S) = 0.$$

La surface transformée a pour équation tangentielle

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0;$$

si la première équation est de degré m, la seconde est de degré $3m$. Or les degrés des équations marquent précisément les classes des surfaces.

La surface transformée étant de classe $3m$, cherchons combien on peut lui mener de plans tangents parallèles au plan $B'C'D'$. Si l'on peut en mener h distincts de $B'C'D'$, le plan $B'C'D'$ sera un plan tangent d'ordre $3m - h$.

A un plan tangent de la surface (17) ayant pour équation

$$PX + QY + RZ + ST = 0$$

correspond un plan tangent de la surface transformée ayant pour équation

$$\frac{X'}{\lambda P} + \frac{Y'}{\mu Q} + \frac{Z'}{\nu R} + \frac{T'}{\rho S} = 0.$$

Exprimons que ce dernier plan est parallèle au plan

$$T' = 0,$$

c'est-à-dire identifions son équation avec l'équation

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' + KT' = 0,$$

A', B', C', D' étant les aires des faces du tétraèdre $A'B'C'D'$.

Nous aurons ainsi

$$\lambda PA' = \mu QB' = \nu RC' = \rho S(D' + K)$$

ou bien

$$\frac{P}{\frac{1}{\lambda A'}} = \frac{Q}{\frac{1}{\mu B'}} = \frac{R}{\frac{1}{\nu C'}} = \frac{S}{\frac{1}{\rho(D' + K)}}.$$

Remplaçant dans l'équation homogène (17) les quantités P, Q, R, S par les quantités proportionnelles, on obtient

$$f\left(\frac{1}{\lambda A'}, \frac{1}{\mu B'}, \frac{1}{\nu C'}, \frac{1}{\rho(D'+K)}\right) = 0,$$

ce qui donne, pour K, *m* valeurs. On peut donc mener à la surface transformée *m* plans tangents parallèles à chacune des faces du tétraèdre A'B'C'D', ce qui prouve que chacune de ces faces tient lieu de $2m$ plans tangents.

Nouvelle démonstration du théorème IV. — Le théorème IV peut être regardé comme un cas particulier d'un autre théorème que nous allons déduire de quelques remarques simples.

Si une surface de classe *m* est tangente à la face BCD, tous les plans menés par A' sont tangents à l'autre surface. Donc le point A' fait partie de la surface transformée et la classe de cette dernière s'abaisse d'une unité, ainsi que l'ordre de contact des trois faces qui se coupent en A'.

Il résulte de là que, *si une surface de classe m touche les faces du tétraèdre* ABCD, α, β, γ, δ *fois, la surface transformée a pour classe le nombre*

$$3m - \alpha - \beta - \gamma - \delta$$

et touche les faces du tétraèdre A'B'C'D', α', β', γ', δ' *fois, les nombres* α', β', γ', δ' *étant définis par les égalités suivantes :*

$$\alpha' = 2m - \beta - \gamma - \delta,$$
$$\beta' = 2m - \alpha - \gamma - \delta,$$
$$\gamma' = 2m - \alpha - \beta - \delta,$$
$$\delta' = 2m - \alpha - \beta - \gamma.$$

Le théorème IV n'est qu'un cas particulier de celui qui précède. Il n'y a qu'à remplacer, dans le cas général, *m* par $3m$ et α, β, γ, δ par $2m$. (*A suivre.*)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVIII, 2e SÉRIE.)

Théorie des nombres.

Algèbre.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Cosmographie.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XVIII, 2e SÉRIE.)

5068 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

